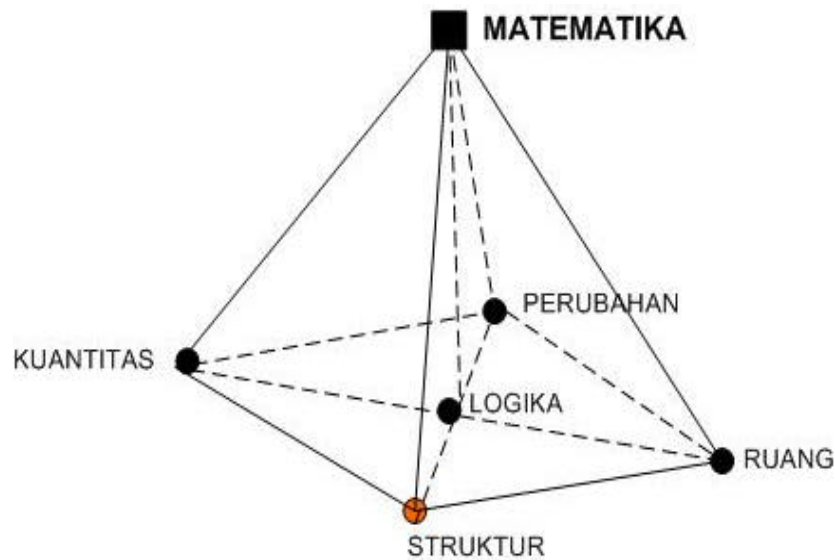


MATEMATIKA

I. Umum

Pada awal perkembangannya, matematika merupakan kajian sistematis tentang bentuk (*shape*) dan gerakan objek fisis dalam kehidupan sehari-hari (berhubungan erat terutama dengan fisika). Kajian dilakukan dengan mengeksplorasi konsep-konsep kuantitas, struktur, ruang, dan perubahan, yang tentu saja berdasarkan penggunaan logika penalaran manusia (Gambar 1).



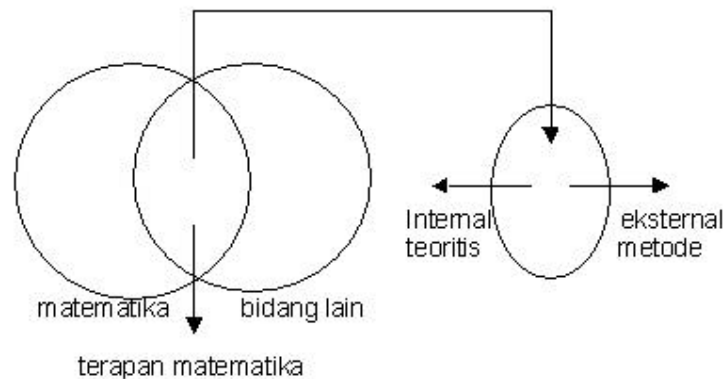
Gambar 1. Kajian matematika

Eksplorasi yang dilakukan berlandaskan :

(i) Abstraksi dan simbolisasi, (ii) Penetapan aksioma, definisi (iii) Formulasi konjektur ('dugaan'), (iv) Deduksi secara taat azas ('*rigorous*') berdasarkan penalaran untuk menyatakan kebenaran dugaan, serta (v) membangun teorema.

Kajian dengan tujuan mengembangkan pengetahuan matematika secara internal (pengembangan konjektur, teorema, pendekatan alternatif) sering dikategorikan sebagai kajian matematika murni (*pure mathematics*). Sedangkan kajian dalam arah eksternal yang melibatkan bidang pengetahuan (atau keilmuan lain) dikategorikan sebagai kajian matematika terapan (*applied mathematics*). Pengembangan eksternal ini meliputi kajian model matematis, metode matematis (dibangun berdasarkan teorema-teorema) yang sesuai, serta metode komputasinya.

Meskipun demikian dalam perjalanan kajian matematika terapan ini di dalamnya dapat terjadi pula kajian teoritis (matematis), yang mengarah dalam kajian matematika yang oleh sementara orang disebut dengan matematika murni (Gambar 2).



Gambar 2. Kajian matematika dan bidang lain

Oleh karena itu sebenarnya dalam perkembangan selanjutnya sulit memilah (membuat garis batas) antara kedua jenis kajian tersebut (murni dan terapan). Memang pada dasarnya di dalam matematika itu sendiri tidak dikenal kedua istilah tersebut. Pemilahan itu hanya dikenal dalam pemberian nama program studi sesuai dengan kurikulum yang ditetapkan (sesuai dengan batasan dan tujuan pembahasan).

Catatan :

Sering terjadi kesalahpahaman bahwa penggunaan metode matematika (sebagai alat) dikatakan merupakan bidang matematika terapan. Sebenarnya bidang ini bukan merupakan bidang matematika terapan. Akan tetapi kajian metode matematika yang digunakan (tentu saja berikut dengan latar belakang pengertian dasar matematikanya) merupakan bidang matematika terapan.

Sebagai ilustrasi, orang menggunakan komputer sebagai alat bantu bukanlah kajian ilmu komputer. Demikian juga pengetahuan untuk mengendarai mobil, bukanlah kajian otomotif.

II. Bidang Kajian Matematika

Secara umum, bidang-bidang kajian dalam matematika adalah sebagai berikut:

- Teori Himpunan
- Teori Bilangan
- Logika
- Aljabar
 - Aljabar Elementer
 - Aljabar Linear
 - Aljabar Abstrak
- Geometri
- Trigonometri
- Topologi
- Analisis
- Probabilitas
- Statistika
- Matematika Diskret
- Matematika Terapan

Pembagian bidang kajian di atas, bukanlah satu-satunya pembagian bidang. Mungkin pula terdapat pembidangan lain, oleh karena mungkin juga dua atau lebih bidang di atas saling bersinggungan (terdapat beberapa topik sama yang dipelajari). Mungkin pula suatu bidang merupakan dapat dia nggap sebagai pengembangan atau (atau beberapa) bidang yang lain.

Selanjutnya, nama bidang kajian tersebut terlepas dari pemberian nama mata kuliah. Mungkin terjadi nama bidang di atas dijadikan nama mata kuliah, mungkin pula nama suatu mata kuliah menggunakan beberapa materi dari satu (atau lebih) bidang kajian.

Uraian singkat beberapa bidang kajian di atas adalah sebagai berikut:

1. Teori Himpunan

Merupakan bidang matematika yg mengkaji himpunan yakni kumpulan (koleksi) dari objek-objek. Dasar dari kajian himpunan adalah konsep keanggotaan. Kajian himpunan berawal dari pemilahan obyek-obyek fisik yg mempunyai kesamaan sifat .

Walaupun obyek tersebut dapat berupa obyek apapun, namun dalam matematika objek tersebut berupa obyek yang relevan dengan matematika, yaitu bilangan (untuk selanjutnya vektor, fungsi). Di dalam matematika, teori himpunan merupakan dasar dari semua bidang kajian, terutama untuk analisis matematis, topologi, aljabar abstrak, dan matematika diskret.

Pada umumnya dalam teori himpunan, digunakan 2(dua) pendekatan yaitu
(i) Pendekatan intuitif (pendekatan tradisional), seperti yang biasa dipelajari, dan
(ii) Pendekatan aksiomatik (pendekatan modern).

Pendekatan modern ini berawal dari kajian aksioma dan sistem aksioma, serta paradoks (oleh Cantor dan Dedekind). Dalam kerangka aksiomatik ini, diketengahkan (oleh Zermelo-Fraenkel) aksioma yang dikenal sebagai aksioma pemilihan (*axiom of choice*)

Pendekatan aksiomatik dari teori himpunan dengan pendekatan logika matematis, teori pembuktian, teori model, dan teori rekursi, dikenal sebagai fondasi matematika. Pencarian jawab kebenaran dalam kerangka fondasi matematika tersebut melatar belakangi filsafat matematika.

Terdapat himpunan dengan pendekatan lain yang bukan merupakan bahasan dalam teori himpunan. Pendekatan penentuan keanggotaannya tidak bersifat deterministik seperti dalam kajian himpunan yang telah disebutkan di atas. Dalam hal ini keanggotaannya ditentukan berdasarkan konsep *possibility*. Himpunan ini dikenal dengan himpunan kabur (*fuzzy set*).

2. Logika matematis

Logika matematis (pendekatan khusus dari logika filosofis) merupakan kajian matematis dari logika dan penerapannya pada bidang lain (terutama sains komputer). Seperti kita ketahui bahwa tujuan utama dari digunakannya logika adalah memberikan aturan-aturan yang dapat menentukan keabsahan suatu argumentasi atau penalaran. Kajian awal logika matematika ini menggunakan logika dasar ya/tidak dalam suatu pernyataan matematis (atau kaitannya dengan pernyataan lain). Kajian awal ini menggunakan pendekatan teori himpunan. Dengan pendekatan ini menunjukkan bahwa hampir semua teorema matematika dapat dijelaskan secara gamblang, meskipun terdapat terdapat beberapa teorema masih belum dapat dibuktikan.

Dalam kajian lanjut logika matematis, dilakukan pendekatan dalam kerangka fondasi matematika (menggunakan sistem formal). Dalam hal ini tidak secara langsung membuktikan teorema dalam matematika, tetapi memperoleh teorema sebagai alternatif jalan kearah pembuktian.

Logika matematis berkembang sejalan dengan perkembangan fondasi matematika, dalam kerangka geometri, aritmatika, dan analisis. Kajian fondasi matematika tersebut semakin jelas perkembangannya dalam kajian pembuktian konsistensi teori-teori fundamental oleh Hilbert. Hasil kajian Godel (dan lain-lain) baru memberikan penjelasan secara parsial

Dengan berkembangnya kajian lanjut di atas, dewasa ini terdapat beberapa subbidang logika matematika, diantaranya teori himpunan, teori model, teori rekursif, teori pembuktian, dan matematika konstruktif.

3. Teori Bilangan

Merupakan cabang matematika yang secara umum membahas bilangan dan sifat-sifatnya (khususnya integer), berikut masalah dan klas masalah yang muncul dalam pembahasan. Bidang matematika ini sebelumnya dikenal dengan aritmatika. Akan tetapi dengan meluasnya kajian yang dilakukan (tidak terbatas dengan hanya kalkulasi dan sifatnya), selanjutnya bidang ini dikenal dengan teori bilangan.

Teori bilangan terbagi dalam beberapa subbidang, sesuai dengan metode yang digunakan dan jenis kajian yang diteliti, yaitu

(1) Teori bilangan elementer

Yang menjadi obyek kajian adalah bilangan integer dengan pendekatan dasarnya adalah konsep keterbagian (*divisibility*). Dengan konsep dasar tsb dikaji algoritma Euclid, pembagi bersama terbesar (*greatest common divisor*), faktorisasi integer ke dalam bilangan-bilangan prima, hubungan kekongruenan, persamaan Diophantine, bilangan sempurna (*perfect number*). Disamping itu dibahas pula barisan integer, faktorial, dan bilangan Fibonacci. Beberapa teorema yang penting dalam kajian teori bilangan antara lain teorema Euler, Teorema Fermat, teorema sisa Cina (*Chinese remainder theorem*). Beberapa fungsi dan sifatnya yang muncul dalam kajian ini antara lain fungsi Mobius, fungsi Euler- ϕ .

Beberapa teorema dalam teori bilangan elementer dapat dijelaskan dengan menggunakan pengertian-pengertian dalam teori bilangan elementer walaupun dengan kajian yang mendalam. Akan tetapi terdapat teorema yang memerlukan pendekatan lain di luar teori bilangan elementer untuk menyelesaikannya, seperti

- (i) Konjektur Golbach, berhubungan dengan penyajian bilangan genap sebagai jumlah dua bilangan prima,
- (ii) Konjektur Catalan (sekarang dikenal dengan teorema Mihalescu), yang berhubungan dengan pangkat integer-integer berturutan
- (iii) Teorema terakhir Fermat, berhubungan dengan ketakungkinan untuk memperoleh integer tak nol x, y, z yang memenuhi $x^n + y^n = z^n$, untuk $n > 2$.
(Teorema ini dinyatakan sekitar tahun 1637 tak terbukti sampai tahun 1994)

(2) Teori bilangan analitik

Digunakan untuk masalah dalam teori bilangan elementer yang tidak dapat (atau sulit) dipecahkan menggunakan pendekatan teori bilangan elementer (seperti yang telah disebutkan di atas). Teori bilangan analitik ini menggunakan sarana kalkulus dan analisis kompleks untuk menangani pemecahan masalah yang berhubungan dengan integer. Beberapa diantaranya adalah teorema bilangan prima dan hubungannya dengan hipotesis Riemann, masalah Waring (penyajian integer sebagai jumlahan dari pangkat 2, 3, ... dari integer). Di sini dipelajari juga pembuktian tetapan matematis transedental seperti e dan π (tetapi tetapan tersebut tidak menjadi obyek bilangan sebagai dasar pembahasan)

(3) Aljabar bilangan

Dikaji perluasan konsep bilangan dengan bilangan aljabar (pendekatan aljabar). Beberapa pembahasan yang dilakukan diantaranya persamaan polinomial dan akarnya. Pembahasan lanjut di sini diantaranya teori Galois, grup homologi, representasi grup, fungsi-L. Beberapa pertanyaan teoritis yang dipecahkan berhubungan dengan kajian modulo p , untuk bilangan prima p (i.e grup berhingga)

(4) Geometri bilangan

Berhubungan dengan konsep dasar geometris untuk memecahkan masalah dalam teori bilangan (seperti *lattice*). Pembahasan dimulai dengan teorema Minkowski yang berhubungan dengan titik-titik *lattice* dalam himpunan konveks, yang akan membawa ke pembuktian dasar

keberhinggaan dari klas bilangan dan teorema Dirichlets (dua teorema fundamental dalam aljabar teori bilangan).

(5) Teori bilangan kombinatorial

Berhubungan dengan masalah teoritis yang melibatkan konsep kombinatorial dalam penurunan penyelesaiannya. Beberapa topik khusus di sini diantaranya *covering system*, masalah jumlah nol, barisan aritmatik dalam himpunan integer. Dalam menurunkan penyelesaian biasanya digunakan pendekatan aljabar.

(6) Komputasi teori bilangan

Dipelajari algoritma-algoritma dan tekniknya yang relevan dalam teori bilangan. Misalnya algoritma cepat pengujian prima dan faktorisasi integer. Teknik dan algoritma ini penting penerapannya dalam bidang Kriptografi.

4. Aljabar

Merupakan cabang matematika yang berhubungan dengan kajian kuantitas, hubungan, dan struktur yang terbentuk. Pada awalnya, kajian dasar dilakukan dengan penyajian simbolik kuantitas serta operasi-operasinya, meliputi persamaan, persamaan linear, persamaan kuadrat. Kajian ini dikenal sekarang dengan aljabar elementer.

Secara umum, kajian aljabar dapat diklasifikasikan sebagai:

- Aljabar elementer
- Aljabar Linear
- Aljabar Abstrak

Disamping itu, terdapat juga beberapa bidang lain yang dapat digolongkan sebagai aljabar juga (menggunakan pendekatan aljabar), seperti aljabar teori bilangan, aljabar kombinatorik, geometri aljabar, dan sebagainya

4.1 Aljabar elementer

Merupakan bentuk perampakan (generalisasi) dari aritmatika. Dalam aritmatika hanya dipelajari bilangan, operasi bilangan (seperti $+$, $-$, \times , $:$). Di dalam aljabar, bilangan disajikan dengan simbol (seperti x , y , z), yang disebut dengan peubah (*variable*). Dengan menggunakan simbol-simbol, termasuk hubungan antar beberapa simbol maupun bilangan ($=$, $<$, $>$), dilakukan eksplorasi sifat-sifat matematisnya.

Beberapa konsep dasar dalam aljabar linear antara lain ekspresi (termasuk juga ekspresi bentuk polinomial), persamaan dan pertaksamaan, persamaan linear dan sistem persamaan linear. Aljabar elementer ini biasanya dipelajari di sekolah menengah, dan sering dianggap merupakan bagian dari prekalkulus.

4.2 Aljabar linear

Merupakan cabang matematika yang berhubungan dengan kajian vektor, ruang vektor (juga disebut ruang linear), pemetaan linear (disebut juga transformasi linear), dan sistem persamaan linear (di dalamnya muncul pengertian matriks). Ruang vektor merupakan salah satu topik utama dalam matematika modern. Penyajian konkrit aljabar linear ini merupakan bagian dalam geometrik analitik (secara lebih umum, dalam teori operator). Secara lebih luas, aljabar linear digunakan dalam aljabar abstrak dan analisis fungsional.

4.3 Aljabar abstrak

Bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, gelanggang (*ring*), lapangan (*fields*), modul, ruang vektor. Kajian dimulai dengan suatu himpunan takhampa yang dilengkapi dengan satu komposisi biner (struktur aljabar).

Kadang-kadang bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, kadang disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi orang lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer.

Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar). Demikian juga dalam fisika teoritis, seperti aljabar Lie. Kajian struktur aljabar dengan pendekatan homomorfisma akan merupakan bidang kajian khusus yang disebut dengan kategori. Teori kategori ini biasanya digunakan dalam perbandingan berbagai struktur aljabar.

5. Trigonometri (atau Goneometri)

Merupakan cabang matematika yang mengkaji bangun segitiga, khususnya pada bidang datar yang salah satu sudutnya adalah 90 derajat. Yang menjadi dasar dalam kajiannya adalah hubungan antara sudut-sudut dan sisi-sisinya. Hubungan tersebut dinyatakan sebagai fungsi-fungsi trigonometri.

Trigonometri ini banyak diterapkan baik dalam matematika murni maupun terapan (khususnya dalam sains dan teknologi), seperti probabilitas, statistika, fisika, kimia, biologi, kimia, farmasi, seismologi, meteorologi, oseanologi, geodesi, kartografi, rekayasa teknik (elektro, mesin, sipil, arsitek).

Oleh karena sangat luas bidang penggunaannya, pada awalnya trigonometri dipelajari pada sekolah lanjutan ataupun sebagai salah satu bagian dari prekalkulus.

Salah satu cabang trigonometri yaitu kajian trigonometri ruang (khususnya bola), disebut dengan segitiga bola (*spherical trigonometry*). Bidang ini banyak digunakan dalam astronomi dan navigasi.

6. Geometri

Merupakan cabang matematika yang mengkaji ukuran, bentuk permukaan (*shape*), bentuk bangun, dan posisinya dalam ruang observasi. Ini sesuai dengan penggunaan awal geometri (penyelidikan bumi dan ukurannya), bidang ini merupakan sains tertua, yang pada awalnya mengkaji ukuran panjang, luas, dan volume dari bangun-bangun tertentu). Termasuk di dalamnya bidang astronomi yang mengkaji letak dan peredaran planet-planet dalam jagad raya.

Awal pengembangan secara aksiomatik dilakukan oleh Euclid yang dikenal dengan geometri Euclid (*Euclidean Geometry*). Dengan diperkenalkannya konsep koordinat (dikenal sebagai sistem kordinat Kartesius) oleh Rene Descartes dan secara bersamaan dengan pengembangan konsep aljabar, merupakan awal perkembangan bidang geometri. Sejak saat itu bangun-bangun geometri (seperti kurva, garis, bidang datar dan ruang) dapat dieksplorasi secara analitis. Kajian analitis geometri ini merupakan salah bagian kajian dalam kalkulus.

Dengan pengayaan kajian mengenai struktur obyek geometri oleh Euler dan Gauss, akan membawa kajian geometri ke arah kajian topologi dan diferensial geometri.

Berawal dengan pengenalan konsep transformasi menjadikan terjadinya kajian geometri yang disebut dengan geometri non-Euclid (*non Euclidean geometry*). Hal ini dianggap sebagai awal pengembangan geometri modern. Penggunaan secara luas geometri ini dalam fisika menjadikan berkembangnya konsep baru yang disebut dengan geometri Riemann (*Riemannian geometry*). Pendekatan menggunakan geometri Riemann ini dilakukan dalam kajian relativitas.

Disamping jenis pendekatan geometri di atas, dikenal pula geometri fraktal, geometri aljabar dan sebagainya.

Pendekatan geometri Euclid, terutama pada ruang dimensi dua (bidang datar) dan ruang dimensi tiga (ruang nyata), biasanya dipelajari pada sekolah lanjutan atau menjadi salah topik pada prekalkulus.

7. Topologi

Merupakan cabang matematika yang merupakan pengembangan dari geometri. Sesuai dengan namanya, topologi, kajian awal bidang ini adalah dengan mempertimbangkan konsep 'tempat' dalam struktur lokal maupun globalnya (konsep ruang topologi).

Awal kajian topologi dilakukan oleh Euler (sejalan dengan berkembangnya teori graf) dan konsep topologinya sendiri diperkenalkan beberapa abad kemudian oleh B.Listing. Kajian topologi ini dikembangkan dengan menggunakan konsep teori himpunan dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan-himpunan tersebut. Istilah topologi ini digunakan sebagai nama bidang kajiannya atau juga sebagai nama himpunan dengan sifat-sifat tertentu yang digunakan dalam ruang topologinya. Dengan topologi dibangun konsep (melalui definisi) dan teorema, salah satu konsep penting yang dikaji adalah pemetaan (fungsi) yang bersifat homeomorfis. Secara mudahnya fungsi tersebut dapat dianggap dapat me'rentang'kan (*stretch*) suatu ruang (atau bangun dalam ruang) tanpa harus menjadikan ruang (atau bangun ruang) tersebut menjadi sobek (Gambar 3).

Beberapa bidang bagian dari kajian topologi antara lain *point-set topology* (antara lain menyelidiki konsep kekompakan, keterhubungan, dan keterhitungan), topologi aljabar (antara lain menyelidiki konsep homotopi dan homologi), dan topologi geometri (antara lain menyelidiki konsep manifold)

8. Analisis matematis

Dalam matematika disebut dengan analisis (saja). Merupakan kajian secara taat azas (rigorous) dari kalkulus. Dalam hal ini dilakukan analisis rinci dari besaran peubah maupun fungsi di dalamnya berdasarkan pendefinisian pengertian besaran kecil ϵ dan Δ . Dengan pendefinisian tersebut dikaji limit (limit barisan, limit fungsi), teori diferensiasi, integrasi, deret takhingga, dan fungsi analitik. Teori-teori yang dipelajari di dalamnya dalam kerangka bilangan real, bilangan kompleks, dan fungsi real, fungsi kompleks. Disamping itu secara lanjut dikaji pula dalam kerangka ruang obyek matematis (ruang topologi) yang mempertimbangkan 'jarak'nya (ruang metrik)

Dengan berkembangnya jangkauan topik dalam analisis, kajian analisis seringkali dibagi ke dalam beberapa kajian khusus, meliputi

- (i) Analisis real, merupakan kajian diferensial dan integral dari fungsi real, termasuk di dalamnya kajian barisan serta limit, deretnya, dan ukuran.
- (ii) Analisis fungsional, merupakan kajian fungsi dalam ruang fungsi menyangkut di dalamnya konsep ruang Banach dan ruang Hilbert
- (iii) Analisis harmonik, kajian yang berhubungan dengan deret Fourier dan abstraksinya
- (iv) Analisis kompleks, seperti analisis real tetapi dikaji dikaji fungsi pada bidang kompleks ke bidang kompleks yang dbersifat diferensiabel
- (v) Geometri diferensial dan topologi, yaitu penerapan kalkulus ke dalam ruang ruang abstrak matematis yang struktur lebih spesifik
- (vi) Analisis numerik, kajian yang berhubungan dengan algoritma numerik untuk menghampiri (aproksimasi) fungsi kontinu dengan menggunakan fungsi diskret (diskretisasi)

Disamping kajian analisis seperti yang telah disebutkan di atas, masih terdapat pula beberapa pendekatan analisis lain.

9. Teori probabilitas

Merupakan cabang matematika yang berhubungan dengan analisis fenomena acak. Obyek utama dalam kajian adalah peubah acak, kejadian acak, dan proses stokastik. Dua obyek penting dalam kajian ini adalah hukum bilangan besar (*law of large number*) dan teorema limit pusat (*central limit theorem*).

Pada awalnya yang dipertimbangkan adalah kejadian diskret dengan metode yang menggunakan konsep kombinatorial. Dasar matematisnya diberikan oleh Pascal dan Fermat yang di dalamnya menggunakan kajian peluang dari munculnya suatu kejadian. Selanjutnya, pendekatan analitisnya baru dapat dilakukan dengan memperluas ke kejadian kontinu. Hal ini baru dapat dilakukan setelah diperkenalkan sistem aksiomatik oleh Kolmogorov. Pengembangan

analitis teori probabilitas dapat berlanjut dengan menggunakan teori ukuran (*measure theory*). Hal ini merupakan awal pengembangan modern dari teori probabilitas.

Teori probabilitas merupakan konsep matematis fundamental dalam kajian statistika. Sebagai fondasi matematis, teori probabilitas diperlukan dalam berbagai aktivitas yang melibatkan analisis kuantitatif dari data yang berjumlah besar.

Metode–metode probabilitas (dalam sistem kompleks) digunakan dalam mekanika statistis. Hal ini merupakan pendekatan dalam fisika teoritis dalam penyelidikan fenomena fisis khususnya dalam kajian secara atomik. Kajian khusus dalam fisika teoritis tersebut disebut dengan mekanika kuantum.

10. Statistika

Merupakan sains matematis dengan di dalamnya menggunakan pertimbangan utamanya adalah data, meliputi analisis dan interpretasi dengan pembahasan dan penggunaan metode (disebut metode statistika).

Untuk alasan praktis, biasanya observasi dilakukan terhadap sejumlah data (sebagai sampel) yang diharapkan selanjutnya dapat menggambarkan populasi fenomena yang diobservasi. Kajian metode statistis tersebut dapat diklasifikasikan sebagai

(i) Statistika deskriptif, digunakan untuk menjelaskan gambaran tentang kumpulan data.

Dengan statistika deskriptif tersebut, digambarkan secara numerik (angka-angka) atau diagram dengan menggunakan rata-rata (*mean*) dan simpangan bakunya (*standard deviation*)

(ii) Statistika inferensi, digunakan untuk menjelaskan gambaran tentang inferensi proses atau populasi yang diobservasi. Ini dilakukan setelah pola data dapat dimodelkan dengan mempertimbangkan keacakannya dalam observasi.

Dengan statistika inferensi tersebut dilakukan pemodelan pola dari data, keacakan data dan penggambaran inferensi dalam populasinya. Inferensi ini dapat berupa jawaban ya/tidak (uji hipotesa), estimasi karakteristik numerik (estimasi), gambaran keterhubungan (korelasi), pemodelan hubungan (regresi), dan termasuk teknik pemodelan lain meliputi analisis variansi (anova), runtun waktu (*time series*), dan *data mining*.

Kedua klas tersebut di atas dianggap sebagai statistika terapan.

Dengan mempertimbangkan sifat keempirikan statistika dan penggunaannya, statistika dipandang sebagai cabang dari matematika terapan. Akan tetapi dengan perkembangan penerapan statistika, sementara orang menganggap bahwa statistika merupakan bidang ilmu sendiri.

Terdapat disiplin lain yg disebut dengan statistika matematis yang mempelajari aspek teoritis (matematis) dari statistika.

Fondasi teoritis dari statistika merupakan teori probabilitas, yang berawal dari kajian peluang munculnya kejadian, yg dilakukan oleh Pascal dan Fermat (lihat probabilitas). Sedangkan metode awal dalam statistika (metode *least square*) diperkenalkan oleh Gauss. Dengan penggunaan komputer, dimungkinkan untuk mengolah sejumlah besar data dengan cepat. Hal ini menjadikan berkembangnya kajian statistika yang dikenal dengan komputasi statistika.

Dalam sehari-hari sering dicampur adukan antara statistika dengan statistik. Misalnya statistik kelahiran dan kematian, yang menyatakan banyaknya kelahiran dan kematian di suatu daerah dan pada selang waktu tertentu. Demikian pula statistik kriminalitas, statistik kemiskinan, dan sebagainya.

11. Matematika diskret

Dalam bidang ini dilakukan kajian struktur diskret secara matematis, dalam arti tidak mempertimbangkan kekontinuan. Kadang disebut juga dengan matematika berhingga. Obyek dasar yang dipelajari di dalamnya meliputi himpunan terhitung (*countable sets*) seperti integer,

graf berhingga, dan bahasa formal. Matematika diskrit menjadi populer sejalan dengan berkembangnya sains komputer.

Beberapa topik yang dipelajari diantaranya logika (kajian penalaran), teori himpunan (kajian kumpulan elemen) termasuk di dalamnya fungsi dan relasi, poset (*partially order set*) dan *lattice*, teori bilangan (termasuk di dalamnya pencacahan), kombinatorik (meliputi teori disain, kombinatorik enumeratif, teori graf), algoritma serta teknik dan kompleksitasnya, serta teori informasi. Dengan topik lanjut meliputi teori kompleksitas dan komputabilitas (berhubungan dengan keterbatasan teoritis dari algoritma), serta teori pembuktian.

12. Matematika Terapan

Merupakan cabang matematika yang berhubungan dengan penerapan matematika pada bidang matematika sendiri (probabilitas, teori persamaan diferensial, statistika, analisis numerik) maupun bidang ilmu pengetahuan lain.

Sejalan dengan perkembangan matematika yang berawal dari fisika, pada awalnya yang dimaksudkan dengan matematika terapan merupakan kajian matematis dalam fisika (fisika berbasis Newton). Pada awalnya adalah mekanika klasik dan mekanika fluida. Sejalan dengan perkembangan masalah fisika, perkembangan selanjutnya meliputi kajian aproksimasi (di dalamnya termasuk metode asimptotis, metode variasional), dan optimisasi.

Pada awalnya memang terdapat perbedaan antara matematika terapan (*applied mathematics*) dan penerapan matematika pada bidang ilmu pengetahuan lain (*application of mathematics*). Namun sejalan dengan pesatnya perkembangan terapan matematika pada bidang lain, yang sebelumnya hanya memerlukan metode matematis, lama kelamaan semakin memerlukan dasar pendekatan teori matematis. Perkembangan ini menjadikan munculnya bidang kajian baru yang dapat dikategorikan sebagai matematika terapan juga. Dengan demikian menjadikan semakin tipisnya perbedaan tersebut di atas.

Dengan berkembangnya pengetahuan lain maupun penerapan pada masalah sehari-hari yang memerlukan fondasi matematika maupun metode matematisnya, berkembang pula berbagai subbidang matematika terapan.

Dewasa ini yang menjadi topik (subbidang) utama dalam matematika terapan adalah sebagai berikut :

- (1) Analisis Terapan : teori aproksimasi, teori optimisasi, analisis numerik, sistem dinamik, teori *chaos*
- (2) Matematika diskrit : Kombinatorik, teori graf, teori permainan, geometri diskrit, teori komputasi, teori komputabilitas, teori kompleksitas, teori Informasi, kriptografi
- (3) Probabilitas: Distribusi probabilitas, statistika, proses stokastik
- (4) Subbidang lain : Riset Operasional, Matematika biologi, Matematika Finansial, Matematika Ekonomi, sains komputer.

Berikut ini diberikan gambaran singkat dari beberapa subbidang matematika terapan :

12.1 Teori aproksimasi

Merupakan bidang matematika berhubungan dengan kajian teoritis pemilihan fungsi yang dianggap paling mendekati (terkecil kesalahannya dengan menggunakan ukuran dan kriteria tertentu) suatu fungsi.

Konsep dasar teoritisnya adalah deret Fourier rampak (*generalized Fourier series*), polinomial ortogonal (diantaranya polinomial Chebychev), basis ortonormal.

Dalam kajian lanjut aproksimasi dilakukan dengan menggunakan analisis fungsional (ruang fungsi, ruang dimensi takhingga). Kajian ini disebut dengan aproksimasi dalam dimensi takhingga.

12.2 Teori optimisasi

Merupakan bidang matematika yang berhubungan dengan kajian teoritis masalah pencarian nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi (real) yang diberikan, dalam kisaran daerah yang terbentuk oleh sejumlah batasan fungsi-fungsi yang diberikan pula. Secara ekuivalen masalah tersebut merupakan pemilihan nilai real atau integer dalam suatu daerah tertentu yang merupakan subhimpunan dari himpunan Euclid. Bidang kajian ini sering disebut pula dengan pemrograman matematis. Apabila fungsi-fungsi yang dihadapi merupakan fungsi linear maka bidang kajian tersebut dinamakan dengan pemrograman linear. Apabila fungsi-fungsinya merupakan fungsi non linear maka bidang kajiannya disebut dengan pemrograman nonlinear.

Dalam kajian lanjutnya digunakan pendekatan analisis fungsional (ruang fungsi, dimensi takhingga). Kajian ini disebut dengan optimisasi dalam dimensi takhingga. Kajian lanjut ini digunakan dalam pengendalian optimum, yang biasanya menggunakan kalkulus variasi.

Teori optimisasi ini merupakan salah satu dasar matematis dari bidang kajian riset operasional.

12.3 Sistem dinamik

Konsep sistem dinamik merupakan model matematis dari fenomena gerakan obyek yang bergantung waktu dan keadaan, yang evolusi di dalamnya mengikuti aturan (deterministik) tertentu.

Konsep awal kajian berdasarkan kajian masalah pada mekanika Newton (persamaan gerakan planet). Dengan mempertimbangkan keadaan awalnya, kajian yang dilakukan antara lain bagaimana perilaku sistem untuk waktu yang lama. Kajian dilakukan melalui persamaan lintasan trayektori (orbit) dari gerakannya. Dalam hal ini obyek kajiannya berhubungan dengan konsep stabilitas sistem (stabilitas struktural, stabilitas Lyapunov).

Model matematis yang menyajikan suatu sistem dinamik berupa sistem persamaan diferensial (biasa maupun parsial). Dengan mempertimbangkan fenomena gerakan yang dihadapi, sistem dinamik tersebut dapat berupa sistem dinamik linear ataupun non linear. Dalam hal praktisnya model tersebut dibawa ke bentuk sistem persamaan diferensi (sistem diskret), sehingga dapat dikomputasikan dengan pendekatan metode numerik.

Kajian lanjut dari sistem dinamik banyak melibatkan fisika teoritis antara lain teori bifurkasi dan teori turbulensi fluida. Pendekatan probabilistik akan membantu kajian sistem dinamik dalam mekanika statistis. Hal ini akan membantu dalam kajian lanjut sistem dinamik yang dikenal dengan fenomena *chaos*.

Bidang pengetahuan lain yang dilibatkan dalam kajian sistem dinamik adalah fisika dan biologi.

12.4 Matematika komputasi

Merupakan cabang matematika yang mengkaji (i) penggunaan matematika dalam teori komputasi dan (ii) penggunaan alat komputasi untuk membantu pemecahan model matematis (metode numerik).

Pendekatan dasar matematika pada kajian (i) terutama matematika diskrit. Sebagai obyek kajian utama adalah mesin abstrak (meliputi automata, mesin Turing) dan bahasa formal, penyandian (*coding*) dan *error correcting code*. Kajian ini merupakan bidang dasar utama dari sains komputer. Sedangkan pendekatan dasar pada kajian (ii) adalah diskretisasi dari aspek kekontinuan. Dalam hal ini kajian lebih ditekankan pada aspek numeris (analisis numerik) dari metode penyelesaian (metode numerik), termasuk di dalamnya kajian algoritmis. Dalam hal ini pertimbangan kompleksitas metode sesuai dengan alat komputasi yang digunakan.

12.5 Riset Operasional

Merupakan cabang interdisiplin matematika terapan dan sains formal (kajian teoritis sistem formal, matematika, teori sistem, sains komputer, teori informasi, dan probabilitas). Pendekatan metode yang menjadi dasar riset operasional antara lain pemrograman matematis (disebut juga optimisasi), probabilitas dan algoritma. Teknik riset operasional digunakan terutama dalam perencanaan dan pengoperasian industri dan bisnis dengan tujuan untuk memaksimalkan keuntungan (atau peluang, manfaat) ataupun meminimumkan kerugian (atau biaya, risiko) sebagai obyektif pemecahan masalah.

Berbagai sarana atau metode matematis yang digunakan antara lain optimisasi, teori probabilitas-statistika, teori antrian, teori permainan, analisis jaringan, teori simulasi, analisis keputusan, manajemen informasi.

Dalam bidang manajemen, riset operasional sering digunakan dalam hampir semua tahapan manajemen terutama dalam tahap perencanaan. Oleh karena itu dari tinjauan bidang manajemen, riset operasional sering disebut sebagai sains manajemen.

12.6 Matematika ekonomi

Penerapan metode matematis dalam kajian teori ekonomi maupun pengembangan analisis ekonomi yang memerlukan fondasi matematika. Pengembangan awal bidang ini dilakukan oleh Paul Samuelson dalam buku *Foundation of Economic Analysis* (1947). Kebanyakan kajian ekonomi modern disajikan dengan menggunakan pengertian geometri maupun pengertian matematika elementer (kalkulus dan aljabar matriks). Dengan penggunaan matematika ekonomi (sebagai alat) ini akan mempermudah dalam melakukan analisis ekonomi.

Beberapa topik dalam matematika ekonomi pada antara lain teori keseimbangan, teori elastisitas, fungsi utilitas, teori pertumbuhan, optimisasi, teori permainan, ekonometrika, model ekonomi kesejahteraan (*welfare economics*), persamaan Black-Scholes, dan arbitrase. Kedua topik terakhir juga merupakan topik dalam matematika finansial.

12.7 Matematika finansial

Merupakan cabang matematika terapan yang mengkaji masalah dalam pasar finansial. Kajian ini banyak berhubungan dengan bidang ekonomi finansial. Secara umum dalam matematika finansial dilakukan kajian model matematis (atau numeris) dari masalah dalam ekonomi finansial. Dalam kajian klasik, kajian dilakukan hanya terbatas menggunakan pendekatan kalkulus. Dengan pendekatan kalkulus dilakukan penurunan model matematis dari masalah yang berhubungan dengan salah satu unsur finansial (investasi uang), seperti bunga, nilai kini dan nilai masa-datang. Dalam pendekatan modern, kajian yang dilakukan erat hubungannya dengan masalah instrumen finansial dalam pasar saham (*stock market*). Diantaranya dalam penentuan harga saham, kajian valuasi opsi dan, penentuan harga derivatif (*derivative pricing*), penentuan nilai kontrak.

Sesuai dengan fenomena keacakan yang terjadi pada masalah finansial, kajian yang dilakukan dilakukan dengan pendekatan kalkulus stokastik. Dengan demikian model matematis yang dihadapi biasanya merupakan persamaan diferensial (parsial) stokastik. Salah satu teorema fundamental yang memegang peranan penting adalah Teorema Fundamental *arbitrage-free pricing*.

Oleh karena rumitnya, secara praktis model matematis yang diperoleh biasanya dibawa ke dalam model komputasi numerik

Dasar pengetahuan matematika yang banyak diperlukan dalam matematika finansial diantaranya adalah kalkulus, persamaan diferensial parsial, analisis dan metode numerik, analisis real, teori probabilitas, teori ukur, kalkulus stokastik

12.8 Matematika Biologi (*Biomathematics*)

Sering disebut dengan biologi matematis (*mathematical biology*), pemodelan matematis biologi (*biological mathematical modelling*). Bidang interdisiplin yang di dalamnya dikaji proses biologis menggunakan teknik matematis. Bidang ini melibatkan kolaborasi beragam bidang pengetahuan lain antara lain matematika, fisika, biologi, kedokteran, dan kimia.

Matematika biologi ini sudah lama menjadi bidang kajian (terutama dalam penelitian). Kajian yang dilakukan antara lain: dinamika populasi (model pemangsa-mangsa – persamaan Lotka Volterra), epidemiologi matematis (model penyebaran penyakit), model sistem fisiologi. Kajian tersebut melibatkan sistem persamaan diferensial parsial dan proses stokastik.

Dengan pesatnya perkembangan biologi molekular, kajian matematis yang dilakukanpun semakin berkembang, antara lain mekanisme jaringan biologi, enzimologi, dinamika antar sel. Kajian yang paling mutakhir yang dilakukan berhubungan dengan revolusi genomik. Bidang kajian ini disamping melibatkan metode matematis juga melibatkan teknik komputasi. Dengan beragamnya kajian yang dilakukan, kajian ini membentuk bidang khusus yang dikenal dengan bioinformatika

III. Pendekatan eksploratif dalam matematika

Di dalam melakukan eksplorasi kajian matematika, kita dapat membedakan pendekatan yang dilakukan, yaitu

1. Pendekatan kontinu – diskrit

Pendekatan kontinu merupakan dasar pendekatan kajian matematika terutama dalam melakukan kajian analitis. Dalam hal ini domain masalah, hasil yang diharapkan serta keterhubungannya (fungsi) bersifat kontinu. Sedangkan dalam pendekatan diskrit, domain dan hasil yang diharapkan bersifat diskrit. Di sini, dalam melakukan eksplorasinya digunakan kajian hubungan diskrit, biasanya berdasarkan polanya. (misalnya rekursivitas). Bidang matematika yang menggunakan pendekatan ini dikenal dengan matematika diskrit. Di samping itu juga dalam melakukan eksplorasinya, pendekatan diskrit menggunakan pendekatan (hubungan) kontinu. Dalam hal ini dapat dilakukan karena fenomena diskrit merupakan subbagian dari fenomena kontinu. Hal ini berarti bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan pendekatan kontinu berlaku pula sebagai hasil dari pendekatan diskrit. Tetapi tidak berlaku sebaliknya (mengapa ?)

Dalam kedua klas pendekatan ini dikenal pula dengan pendekatan diskretisasi. Dengan pendekatan ini, ‘perhitungan’ yang sulit atau tidak dapat dilakukan dengan pendekatan kontinu, dilakukan dengan teknik aproksimasi. Dengan demikian hasil yang diperoleh merupakan hampiran (kesalahannya minimum, sesuai dengan ukuran yang digunakan) dari hasil eksaknya. Dalam haal ini, metode-metode yang digunakan untuk memperoleh hasil (hampiran) dikenal dengan metode numerik. Sedangkan kajian kajian teoritisnya dikenal dengan analisis numerik.

2. Pendekatan deterministik – non deterministik (probabilistik – posibilistik)

Dengan pendekatan deterministik dianggap bahwa semua parameter yang terlibat dalam eksplorasi bersifat deterministik (tertentu). Dalam arti bahwa nilai parameternya tertentu (dapat diartikan tetap) untuk semua keadaan (termasuk waktu). Sedangkan apabila kita sifat parameternya tidak bersifat demikian, maka digunakan pendekatan non deterministik. Dalam pendekatan nondeterministik ini kita harus melakukan eksplorasi sifat dari fenomena yang diobservasi. Dalam hal ini apabila fenomenanya dianggap bersifat probabilistik (mengandung unsur keacakan), maka pendekatan yang digunakan adalah probabilistik. Dalam pendekatan nondeterministik ini dapat juga tidak digunakan pendekatan probabilistik tetapi pendekatan posibilistik (bandingkan antara *probable* dan *possible*). Pendekatan ini diperkenalkan oleh Lothfi A.Zadeh pada tahun 1973 yang peninjauannya berdasarkan keaburan akan benar tidaknya terjadinya kejadian (konsep kemungkinan – *possibility*). Dengan pendekatannya tersebut

diketengahkan konsep matematis baru (sebagai *breakthrough*) yang dikenal dengan logika kabur (*fuzzy logic*) yang diturunkan berdasarkan konsep himpunan kabur (*fuzzy set*).

IV. Beberapa pendekatan ‘baru’

Dengan menggunakan konsep yang sudah banyak dikenal sebelumnya, kemajuan pengembangan internal matematika semakin lama semakin lambat. Masalah-masalah yang belum terpecahkan semakin lama semakin ‘sedikit’. Akibatnya masalah yang tersisa semakin sulit dipecahkan. Hal ini tentu saja sama dengan sains dasar lainnya. Oleh karena dalam pengembangannya biasanya menggunakan pendekatan lain sebagai terobosan (*break-through*). Beberapa pendekatan alternatif yang dianggap signifikan dalam pengembangan matematika antara lain adalah

1. Fondasi analitik probabilitas

Dengan menggunakan konsep probabilitas sebelumnya yang menggunakan konsep frekuensi terjadinya suatu kejadian, penurunan teorema-teorema dalam teori probabilitas dianggap tidak dapat dilakukan secara analitis. Hal ini karena pada awalnya fenomena kejadian yang dipertimbangkan merupakan fenomena diskrit, sehingga tidak dapat dirampakan (generalized) dalam fenomena kontinu. Dengan diperkenalkannya aksioma dasar oleh A.Kolmogorov (1935), dalam bukunya ‘Foundation of Probability Theory’. Dengan pendekatan aksiomatik ini, konsep fungsi probabilitas didefinisikan dengan menggunakan pendekatan ruang probabilitas (ruang khusus dari ruang Borel-aljabar σ). Dengan menggunakan aljabar Borel (aljabar σ) tersebut teorema-teorema dalam teori probabilitas sudah dapat diturunkan (dibuktikan) dilakukan secara analitis. Di dalam pengembangan aksiomatik (dikenal dengan aksioma Kolmogorov) ini Kolmogorov menggunakan konsep keterukuran (dikenal sekarang dengan teori ukur).

Dengan pendekatan ini, A.Kolmogorov mengembangkan berbagai bidang yang menggunakan probabilitas (seperti proses stokastik), sehingga dia dianggap sebagai peletak fondasi bidang statistika.

2. Logika aksiomatis

Dalam menurunkan (membuktikan) secara analitis suatu teorema biasanya menggunakan argumentasi deduktif. Hal ini dianggap sebagai kajian awal logika matematis dengan menggunakan logika dasar ya/tidak dalam suatu pernyataan matematis (atau kaitannya dengan pernyataan lain). Akan tetapi kadang-kadang hal ini sulit dilakukan ataupun menemui jalan buntu. Pada pertengahan abad 20, diperkenalkan pendekatan logika matematis yang dapat membantu dalam penurunan teorema matematis. Pendekatan logika aksiomatis dalam logika matematis merupakan dasar dalam logika formal, teori himpunan secara logika aksiomatik, teori pembuktian. Konsep-konsep penunjang logika matematis tersebut diperkenalkan antara lain oleh Kurt Godel, David Hilbert, L. E. J. Brouwer, Bertand Russel. Kajian konsep-konsep dalam logika matematis tersebut dikenal sekarang sebagai bidang yang disebut dengan fondasi matematika. Kajian tersebut dianggap pokok-pokok kajian sebagai kerangka bidang filsafat matematika (sebagai cabang kajian dalam filsafat).

3. Logika Fuzzy

Berbeda dengan logika (biasa) yang mempunyai nilai 0 atau 1 (salah, benar), dalam logika *fuzzy* dianggap nilainya dalam kisaran [0, 1] atau dikatakan membentuk logika multi-nilai. Nilai logika ini ditentukan oleh fungsi keanggotannya. Logika *fuzzy* ini diturunkan dari teori himpunan *fuzzy*. Konsep himpunan fuzzy ini perkenalkan pertama kali oleh Lotfi Zadeh pada tahun 1965. Dilihat dari nilainya, mirip dengan pendekatan probabilitas (berdasarkan konsep peluang terjadinya, bersifat acak). Oleh karena itu, banyak kalangan menganggap bahwa pendekatan yang digunakan dalam logika *fuzzy* adalah pendekatan *possibility* (untuk membedakan dengan

pendekatan *probability*). Bandingkan makna *possible* dan *probable*!. Pendekatan logika *fuzzy* ini banyak digunakan dalam berbagai bidang, dari teori kontrol sampai dengan kecerdasan buatan. Dewasa ini sudah banyak peralatan elektronik (menggunakan teknik pengendalian otomatis) yang dirancang berdasarkan konsep logika *fuzzy* (mesin pendingin ruangan, mesin cuci, alat masak, dan lain-lain). Meskipun sudah diakui hasil penerapannya, namun secara matematis (dalam kerangka aksiomatis) penurunan konsep-konsep di dalamnya dianggap secara analitis belum memuaskan

4. Analisis Wavelets

Dalam bidang aproksimasi (hampiran), digunakan berbagai fungsi yang mempunyai sifat-sifat tertentu sebagai fungsi dasarnya. Dalam suatu keadaan dianggap fungsi yang dihampiri bersifat mempunyai banyak ketidak kontinuan, tak periodik, dikenal dengan penggunaan fungsi Fourier sebagai fungsi penghampirnya. Dalam penerapan praktis, digunakan transformasi Fourier (mengubah dari domain waktu ke domain frekuensi). Akan tetapi dalam beberapa penerapan secara praktis, penggunaan transformasi Fourier dianggap masih belum akurat (ataupun kurang praktis) terutama pada penerapan bidang-bidang terapan tertentu seperti dalam bidang eksplorasi pertambangan. Bertolak dari kelemahan tersebut, pada sekitar tahun 1975 geofisikawan Prancis, Jean Morlets dan Alex Grossmann memperkenalkan fungsi dia sebut sebagai fungsi *wavelets* (dalam bahasa perancis, *ondeletes*) dan berikut fungsi transformasinya. Dengan fungsi dan fungsi transformasi tersebut telah diakui banyak kalangan dapat mengatasi kelemahan dari fungsi (transformasi) Fourier. Sesudah pengenalan oleh Morlets dan Grossmann tersebut, bidang ini dikembangkan lagi oleh Yves Meyer, Ingrid Daubechies (Gambar 5), dan Stephane G.Mallat. Disamping penerapan pada eksplorasi pertambangan, penerapan bidang ini banyak dilakukan juga pada bidang lain (antara lain pemrosesan citra, seismologi). Bidang kajian ini dikenal sekarang dengan analisis *wavelets*, dengan topik kajian utamanya adalah analisis multi resolusi.

5. Geometri fraktal

Dengan mengetahui bahwa dalam unsur bentuk obyek dalam konsep matematis kurang mempertimbangkan aspek ketidakteraturan (yang kadang terjadi dalam kehidupan sehari-hari), Benoit Mandelbrot (matematikawan yang bekerja dalam bidang teori informasi, ekonomi, dan dinamika fluida) pada tahun 1982 memperkenalkan pendekatan geometri baru yang dikenal dengan konsep geometri fraktal. Konsep ini berdasarkan pendekatan dimensi Hausdorff yang berbeda dengan pendekatan geometri Euclid. Dengan menggunakan komputer sebagai alat bantu visualisasi, bentuk ketidakteraturan suatu obyek dapat divisualkan dengan indah, sehingga dapat diperlihatkan “keindahan dari suatu ketidakteraturan” (Gambar 4). Pendekatan dengan menggunakan geometri fraktal ini banyak digunakan dalam berbagai bidang, misalnya dalam kajian teori bifurkasi, teori *chaos* (efek kupu-kupu) dalam sistem dinamik, seimologi, dan sebagainya.

IV. Masalah belum terpecahkan

Walaupun dapat dikatakan bahwa usia matematika sama dengan usia peradaban manusia, dan telah mengalami masa perkembangan yang pesat sejak masa keemasan (abad 17-19) diikuti dengan masa perkembangan penerapan yang pesat pada abad 20 dan awal abad 21, namun masih banyak meninggalkan berbagai masalah fundamental yang belum terpecahkan (*unsolved mathematical problems*). Terdapat banyak versi mengenai masalah tersebut. paling tidak Banyak kalangan yang menganggap dalam. Versi pertama dikemukakan pada Kongres Matematikawan Internasional Kedua di Paris, 8 Agustus 1900. Di sini, David Hilbert memberikan 23 masalah

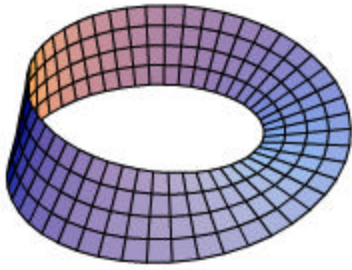
matematika utama yang dianggap belum terpecahkan (Lampiran 1). Dari ke 23 masalah tersebut, 10 masalah sudah terpecahkan (dalam kurun waktu 1977-2004). Diantara 10 masalah dianggap telah terpecahkan, 9 masalah sudah dapat diterima secara penuh (diantaranya yang terkenal adalah *Fermat's last theorem* yang dipecahkan oleh Andrew Wiles, 1994), dan 1 masalah (*Four color theorem* oleh Appel dan Haken, 1977) pembuktiannya belum dapat diterima, karena dianggap lebih menekankan pada komputasi komputer). Versi kedua (Lampiran 2), dikemukakan seratus tahun sesudahnya pada Millenium Meeting 24 Mei 2000 di College de France Paris, yang diprakarsai oleh The Clay Mathematics Institute of Cambridge Massachusetts (CMI, www.claymath.org/millennium) Tema sentral pertemuan tersebut adalah pembahasan masalah matematika yang masih belum terpecahkan (dikenal sebagai *Hilbert problem*). Setelah diputuskan dilakukan formulasi kembali 7 masalah yang setiap pemecahan diberikan hadiah \$ 1 juta, sehingga dikenal sekarang sebagai *Seven Millennium Prize Problem*. Diantara ketujuh masalah tersebut, dianggap baru satu masalah yang sudah dipecahkan yaitu Konjektur Poincare (oleh Gregori Perelman pada tahun 2003, dan dilengkapi pada tahun 2006) Disamping kedua versi di atas, terdapat juga versi ketiga (Lampiran 3), yang mengemukakan 75 masalah yang dianggap belum terpecahkan. Dalam versi ini tercakup pula masalah dalam versi pertama dan versi kedua.

V. Penutup

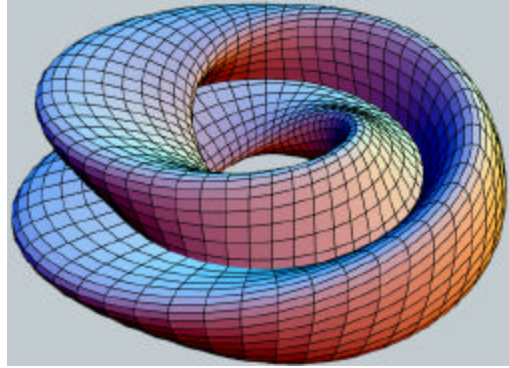
Dari gambaran singkat matematika seperti yang telah diuraikan di atas, nampak betapa luasnya (kajian ke arah luar) kajian matematika. Sedangkan kedalaman (kajian ke arah dalam) tentu saja tidak dapat diungkapkan secara spesifik di sini. Dengan mempertimbangkan aspek keluasannya, tidak mungkin semua dapat dipelajari (apalagi dikuasai !) dalam suatu program pembelajaran. Dengan diberikannya uraian di atas, paling tidak kita dapat melihat benang-benang merah kajian dalam bidang matematika. Dengan demikian diharapkan kita dapat memahami sisi-sisi pandang arah dalam dan luar apabila kita ingin menekuni salah satu bidang kajian dalam matematika.

Sumber rujukan

1. Wikipedia, the free encyclopedia, <http://en.wikipedia.org/>, Juli 2008
2. Penser les mathematiques, Seminaire de philosophi et mathematiques de l'Ecole normale superieur, Sciences-points, Editions du Seuil, 1982
3. Sumber-sumber lain.

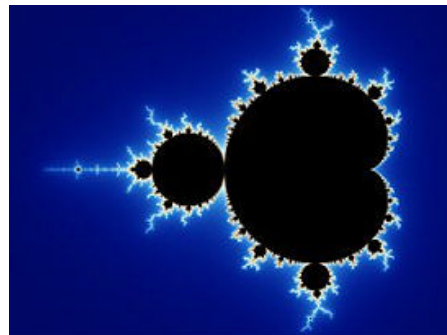


Gambar 3a. Pita Mobius



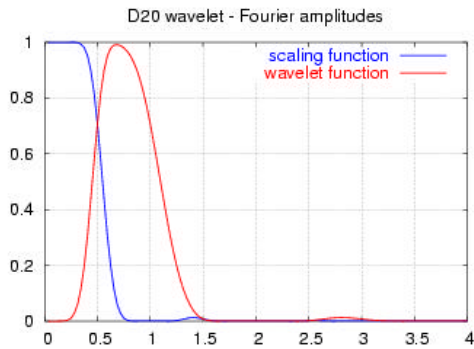
Gambar 3b. Botol Klein

Sumber: http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle



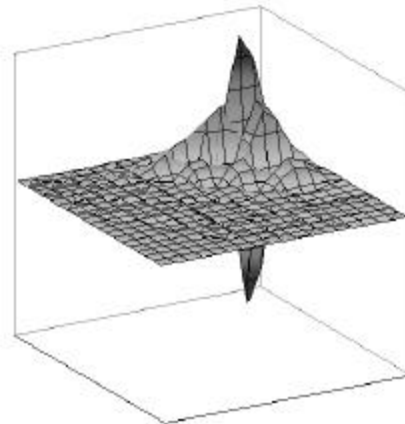
Gambar 4. Himpunan Mandelbrot

Sumber: http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_animation



Gambar 5a. Wavelets Daubechies20 – 1D

Sumber : http://en.wikipedia.org/wiki/Daubechies_wavelet



Gambar 5b. Wavelets Daubechies 20 2-d wavelet

Lampiran

1. Hilbert's Problem

No.	Problem	No.	Problem
1	Cantor's continuum hypothesis	13	Solution of 7th degree equations with 2-parameter functions
2	Consistency of arithmetic axioms	14	Proof of finiteness of complete systems of functions
3	Polyhedral assembly from polyhedron of equal volume *)	15	Schubert's enumerative calculus
4	Constructibility of metrics by geodesics	16	Problem of the topology of algebraic curves and surfaces
5	Existence of topological groups as manifolds that are not differential groups*)	17	Problem related to quadratic forms *)
6	Axiomatization of physics	18	Existence of space-filling polyhedron and densest sphere packing
7	Genfold-Schneider theorem	19	Existence of Lagrangian solution that is not analytic
8	Riemann hypothesis	20	Solvability of variational problems with boundary conditions
9	Algebraic number field reciprocity theorem	21	Existence of linear differential equations with monodromic group
10	Matiyasevich's theorem *)	22	Uniformization of analytic relations
11	Quadratic form solution with algebraic numerical coefficients	23	Calculus of variations
12	Extension of Kronecker's theorem to other number fields		

*) solved

2. Seven Millenium Prize Problems

1. P versus NP
2. The Hodge conjecture
3. The Poincaré conjecture *)
4. Riemann Hypothesis
5. Yang-Mills existence and mass gap
6. Navier-Stokes existence and smoothness
7. The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

*) solved by Gregori Perelman in 2003, completed in 2006)

3. 75 unsolved problems in mathematics

A bc conjecture	F riendly number	J uggler sequence	Q uasiperfect number
Andrica's conjecture	G eneralized star height problem	K obon triangle problem	R egular prime
B alanced prime	G ilbreath's conjecture	L andau's constant	Resolution of singularities
Beal's conjecture	Giuga number	Landau's problems	Riemann hypothesis
Birch and Swinnerton-Dyer conjecture	Goldbach's conjecture	Lychrel number	Riesel number
Bunyakovsky conjecture	Goldbach's weak conjecture	M agic square	Schanuel's conjecture
Burnside's problem	Goormaghtigh conjecture	Mersenne conjectures	Second Hardy-Littlewood conjecture
C ollatz conjecture	H adamard matrix	Millennium Prize Problems	Sierpinski number
Congruent numbers	Hadwiger–Nelson problem	Moving sofa problem	Smale's problems
Constant problem	Hilbert's problems	Navier–Stokes existence and smoothness	Stable group
Cullen number	Hilbert's ninth problem	O dd greedy expansion	Superperfect number
D iscrepancy of hypergraphs	Hilbert's twelfth problem	P = NP problem	T win prime conjecture
Discrepancy theory	Hilbert's sixteenth problem	Palindromic prime	U lam spiral
Divisor summatory function	Hodge conjecture	Perfect number	Unitary representation
E uclid number	I doneal number	Prime quadruplet	V andiver's conjecture
Euclid-Mullin sequence	Invariant subspace problem	Prime triplet	W aring's prime number conjecture
Euler brick	Inverse Galois problem	Problems in Latin squares	Woodall number
F ermat number	J acobian conjecture	Problems in loop theory and quasigroup theory	Y ang-Mills existence and mass gap
Four exponentials conjecture			

Sumber : http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Unsolved_problems_in_mathematics

