BAB 2
MATEMATIKA SEBAGAI ALAT ANALISIS SISTEM KONTROL

Teknik untuk analisis dinamika proses:

1. Transformasi Laplace $\Rightarrow$ umum
2. Simulasi komputer $\Rightarrow$ lebih akurat dan detail

2. 1 Transformasi Laplace (TL):

- Berlaku hanya pada Persamaan Differensial (PD) linear: merubah PD menjadi persamaan aljabar
- Dapat menggunakan teknik grafik untuk meramal performansi sistem tanpa menyelesaikan PD

Pada kebanyakan proses: PD nonlinear $\Rightarrow$ *linearisasi* $\Rightarrow$ TL

- **TRANSFORMASI LAPLACE**

Definisi:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

dengan:

F(s) : TL dari *f(t)*

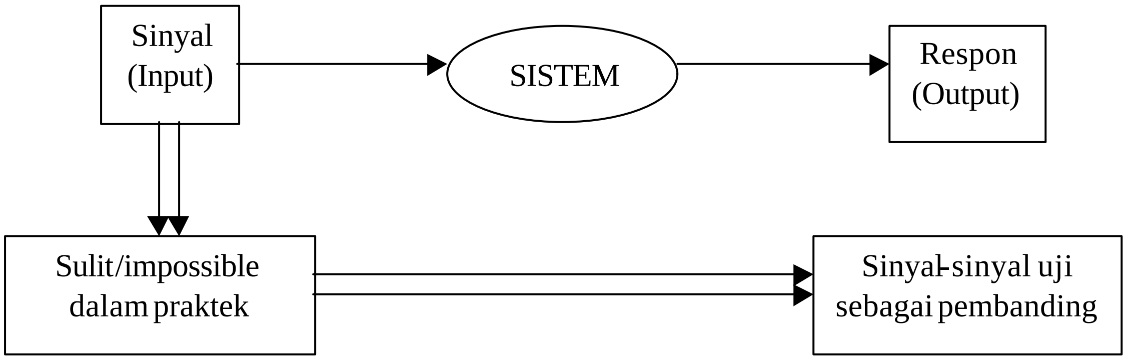
F(t) : fungsi waktu (ingat: proses bersifat dinamik)

: simbol operasi integral Laplace $\int_0^\infty e^{-st}dt$

s : variabel TL

t : waktu

Sinyal Uji



Gambar 2.1 Urgensi sinyal uji

Dalam analisis sistem kontrol, sinyal diterapkan sebagai input ke sistem (seperti gangguan atau *disturbance*, perubahan set point, dll) agar bisa dilakukan studi respon-nya. Meski beberapa jenis sinyal biasanya sulit atau bahkan tidak dapat dicapai dalam prakteknya, sinyal-sinyal uji bisa diterapkan sebagai perbandingan respon.

Berikut ini adalah contoh-sontoh penurunan Transformasi Laplace dari beberapa sinyal uji:

1) Unit step function

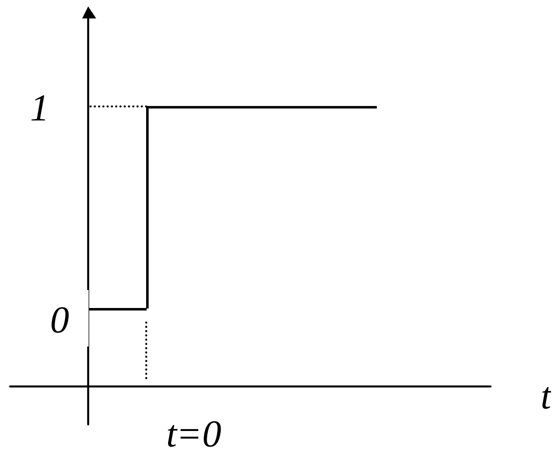
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$

$$= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -1/s\ (0\ -1)$$

$$\boxed{u(t)] \qquad = 1/s}$$



2) Pulsa (sebesar *H* dan berdurasi *T*)

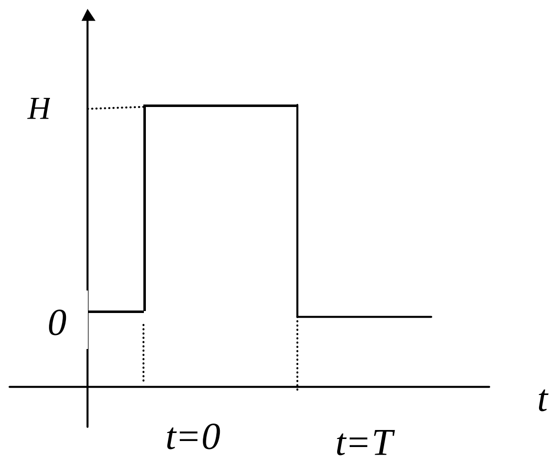
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0, t\geq T \\ H & 0\leq t<T \end{cases}$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty He^{-st}dt$$

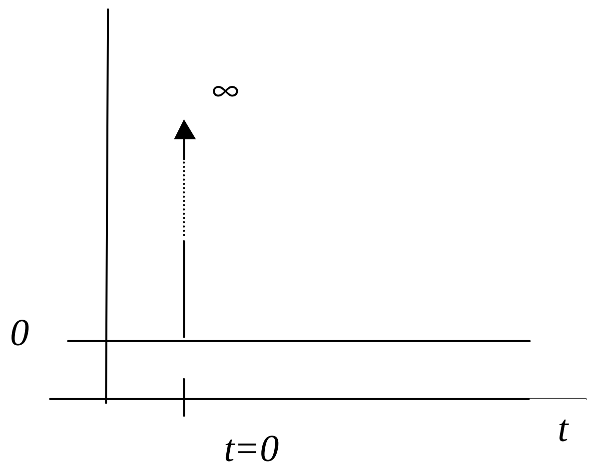
$$= -\frac{H}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = -\frac{H}{s}(e^{-sT}-1)$$

$$\boxed{= \frac{H}{s}(1-e^{-sT})}$$



3) Fungsi impulsa satuan Þ Dirac Delta function (*d*(t))

Ada 2 pendekatan:



Pendekatan Smith, dll.

$d(t) = \lim_{T\to 0} f(t),$

$f(t) = fungsi$ pulsa

dengan: *HT = 1 (luas)*

H = 1/T

$d(t)] = \lim_{T\to 0} \frac{1}{Ts}(1-e^{-sT}) = \frac{1}{0}(1-1) = \frac{0}{0}$

(tdk didefinisikan)

Aturan :

$$d(t)] = \lim_{T\to 0} \frac{\frac{d}{dT}\left(1-e^{-sT}\right)}{\frac{d}{dT}\left(Ts\right)} = \lim_{T\to 0} \frac{se^{-sT}}{s} = 1$$

$$\boxed{d(t)] = 1}$$

- Pendekatan Luyben: $d(t) = \frac{du(t)}{dt}$

$$u(t) = \lim_{T\to 0}\left(1-e^{-t/T}\right)$$

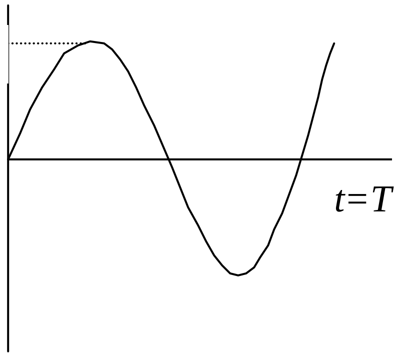
$$d \quad \left[\frac{d}{dt}\left\{\lim_{T\to 0}\left(1-e^{-t/T}\right)\right\}\right]$$

$$= \lim_{T\to 0} £\left[\tfrac{1}{T} e^{-t/T}\right] = \lim_{T\to 0}\left[\tfrac{1}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right] = \lim_{T\to 0}\left[\frac{1}{Ts+1}\right]$$

$$\boxed{d(t)] = 1}$$

4) Gelombang sinus (amplitudo satuan & frekuensi w)

$$\sin wt = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}, i = \sqrt{-1}$$



$$wt] = \int_0^\infty \sin wt e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i} e^{-st} dt$$

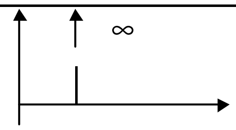
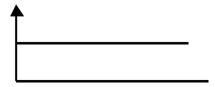
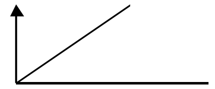
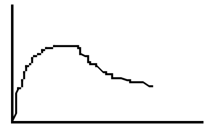
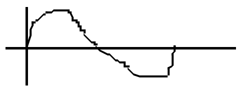
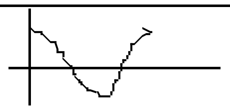
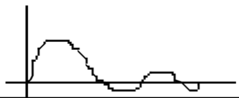
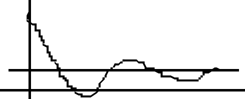
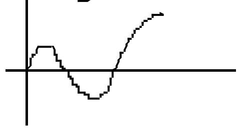
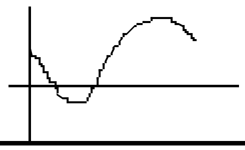
$$= \tfrac{1}{2i}\left[\int_0^\infty e^{-(s-iw)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+iw)t} dt\right]$$

$$= \tfrac{1}{2i}\left[-\frac{s^{-(s-iw)t}}{s-iw} + \frac{s^{-(s+iw)t}}{s+iw}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$= \tfrac{1}{2i}\left[-\frac{0-1}{s-iw} + \frac{0-1}{s+iw}\right] = \frac{1}{2i}\frac{2iw}{s^2+w^2}$$

$$\boxed{wt] = \frac{w}{s^2+w^2}}$$

Tabel 2.1 Transformasi Laplace Sinyal Uji

NO	NAME	Time Function $f(t)$	Laplace Transform $F(s)$	Figure
1.	Unit impulse	$d(t)$	1	
2.	Unit step	$U(t)$	$\frac{1}{s}$	
3.	Unit ramp	t	$\frac{1}{s^2}$	
4.	n-th-order ramp	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
5.	Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	
6.	n-th-order exponential	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	
7.	Sine	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	
8.	Cosine	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	
9.	Damped sine	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$	
10.	Damped cosine	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$	
11.	Diverging sine	$t \sin w$	$\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$	
12.	Diverging cosine	$t \cos wt$	$\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$	

2. 2 TEOREMA TL:

1. Linearitas

   $k.f$ $\quad$ k = *constant*

   Sifat distributif:

   f

2. Real Differentiation Theorem

   $$£\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(())$$

   $$£\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(()) - \frac{df}{dt}(0)$$

   Rumus umum:

   $$£\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) - \ldots - s\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

3. Real Integration Theorem

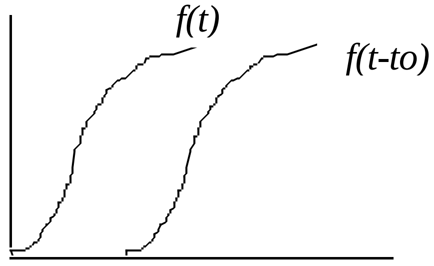
   $$£\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

4. Complex Differentiation Theorem

   $$£[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

5. Real Translation Theorem (Dead Time)

   $$£[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s)$$



   Complex Translation Theorem

   $$£[e^{at} f(t)] = F(s-a)$$

6. Final Value Theorem

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

7. Initial Value Theorem

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

CONTOH:

Cari fungsi Laplace dari PD di bawah ini:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2xw_n \frac{dx(t)}{dt} + w_n^2 x(t) = Kr(t)$$

dengan: K, w_n, x konstanta dan $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$

Jawab:

Teorema 2 (bentuk sederhana):

$s^2X(s) + 2w_nxsX(s) + w_n^2X(s) = KR(s)$

$X(s)[s^2 + 2w_nxs + w_n^2] = KR(s)$

$$X(s) = \frac{K}{s^2 + 2w_nxs + w_n^2} R(s)$$

2. 3 SOLUSI PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Pers. Differensial linear:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x(t)$$

dengan:

- *a* dan *b* adalah koefisien PD
- *y(t)* adalah fungsi keluaran (respon)
- *x(t)* adalah *forcing function* (variabel yang *memaksa)* variabel keluaran untuk berubah atau fungsi masukan

- *initial conditions*

$$y(0)=0; \quad \frac{dy}{dt}(0)=0;.......;\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)=0$$
$$x(0)=0; \quad \frac{dx}{dt}(0)=0;.......;\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}(0)=0$$

Prosedur penyelesian PD:

1. Ubahlah PD ke dalam p'-ersamaan aljabar variabel s (Iihat Teorema TL).
2. Selesaikan secara al abar untuk TL variabel keluaran *Y(s)* dan substitusikan TL variabel masukan *X(s)* sehingga diperoleh rasio dua polinomial:

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$ dengan *N(s) = numerator*

D(s) = denominator

3. Lakukan TL Balik *(invers)* sehingga diperoleh variabel keluaran sebagai fungsi waktu *y(t)*:

y $^{-1}$ *[Y(s)]*

Dengan menggunakan prosedur di atas, maka:

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\left[\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+a_0}\right]X(s)$$

diubah menggunakan *metode ekspansifraksi-parsial* menjadi:

$$Y(s)=\frac{N(s)}{(s-r_1)(s-_2).....(s-r_k)}$$ ke dalam sejumlah *k* fraksi:

$$Y(s)=\frac{A_1}{(s-r_1)}+\frac{A_2}{(s-r_2)}+...+\frac{A_i}{(s-r_i)}+....+\frac{A_k}{(s-r_k)}$$

Ada 4 kasus untuk (mencari akar-akarnya):

1. Akar nyata tak berulang.
2. Sepasang akar konjuingasi kompleks tak berulang.
3. Akar-akar berulang.
4. Adanya *dead time*.

KASUS 1: Akar nyata tak berulang

$$\boxed{A_i = \lim_{s \to r_i} (s - r_i).\ Y(s)}$$

Contoh:

Cari c(t) dari PD linear orde-dua di bawah ini

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 5u(t) \qquad \text{dengan} \quad c(0) = 0; \frac{dc}{dt}(0) = 0$$

Jawab:

$s^2C(s) + 3sC(s) + 2C(s) = 5U(s).$

$C(s)\ (s^2 + 3s + 2) = 5/s$

$$A_1 = \lim_{s \to -1} (s + 1)\ C(s)$$

$$= \lim_{s \to -1} \frac{5}{(s+2)s} = \frac{5}{(-1+2)(-1)} = -5$$

$A_2 = 5/2$ dan $A_3 = 5/2$

$$\mathbf{c(t) = -5e^{-t} + 5/2.e^{-2t} + 5/2.\ u\ (t)}$$

KASUS 2: Sepasang akar konjungasi kompieks

Bila akar-akarnya terdapat bilangan imajiner *i*, maka:

$$Y(s) = \frac{A_1}{(s - a - bi)} + \frac{A_2}{(s - a + bi)} = \frac{A_1^{©}(s-a) + A_2^{©}b}{(s-a)^2 + b^2}$$

$$\boxed{\lim_{s \to a+bi} \quad A_1 \qquad {}^2 \qquad \lim_{s \to a+bi} [(s - a)^2 + b^2].Y(s)}$$

Contoh.

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2\frac{dc(t)}{dt}+5c(t)=3u(t) \quad \text{dengan} \quad c(0)=0;\frac{dc}{dt}(0)=0$$

Jawab:

$s^2C(s) + 2sC(s) + 5C(s) = 3U(s)$

$\lim\limits_{s \to -1-2i} A_1(s+1) + A_2 2 = \lim\limits_{s \to -1-2i} [(s+1)^2 + 2^2].\, C(s)$

$A_1\ (-1 - 2i + 1) + A_2\ 2 = 3/(-1 - 2i)$

Ruas kanan dikalikan akar sekawannya:

$A_1\ (-2i) + A_2 2 = -3/5 + 6/5.i$ *maka:*

$A_1\ (-2\ i) = 6/5i$

$A_2 2 = -3/5 \longrightarrow A2 = -3/10$

$A_3 = 3/5$

$c(t) = -3/5.e^{-t} \cos 2t - 3/10.e^{-t} \sin 2t + 3/5\ u(t)$

KASUS 3: Akar~akar berulanq

$$Y(s)=\frac{N(s)}{(s-r_1)^m\ldots(s-r_k)}=\frac{A_1}{(s-r_1)^m}+\frac{A_2}{(s-r_1)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{s-r_1}+\ldots+\frac{A_k}{s-r_k}$$

$$\boxed{A_k=\lim_{s\to r_1}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left[(s-r_1)^m Y(s)\right]}$$

Contoh:

$$\frac{d^3c(t)}{dt^2}+3\frac{d^2c(t)}{dt^2}+3\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=2u(t)$$

$$\text{dengan} \quad c(0)=0;\frac{dc}{dt}(0)=0;\ \frac{d^2c}{dt^2}(0)=0$$

Jawab:

$s^3C(s) + 3s^2C(s) + 3sC(s) + C(s) = 2U(s)$

$$C(s) = \frac{2}{(s^3+3s^2+3s+1)s} = \frac{2}{(s+1)^3 s}$$

$$= \frac{A_1}{(s+1)^3} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+1} + \frac{A_4}{s}$$

$A_1 = \lim \quad (s + 1)^3 C(s) = -2$

s ®-1

$$A_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s}\right) = \lim_{s\to -1} \frac{2}{s^2} = -2$$

$$A_3 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(3-1)!}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{2}{s}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\frac{4}{s^3} = -2$$

$A_4 = 2$

$$\boldsymbol{c(t) = -te^{-t} - 2t\, e^{-2} - 2e^{-1} + 2u(t)}$$

KASUS 4: Adanya dead time

$$Y(s) = \left[\frac{N(s)}{D(s)}\right]e^{-st_0} = [Y_1(s)]e^{-st_0}$$

$$Y_1(s) = \left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] = \frac{A_1}{s-r_1} + \frac{A_2}{s-r_2} + \ldots + \frac{A_k}{s-r_k}$$

$$y_1(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} + \ldots + A_ke^{r_kt}$$

$Y(s) = e^{-st0}Y_1 \qquad y_1(t - t_0)]$

$y \qquad {}^{-1}[Y(s)] = y_1(t - t_0)$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= £^{-1}[Y(s)] = y_1(t - t_0) \\ &= A_1e^{r_1(t-t_0)} + A_2e^{r_2(t-t_0)} + \ldots + A_ke^{r_k(t-t_0)} \end{aligned}}$$

Catatan:

- Tidak bisa di-Laplace-kan secara langsung dari

$$Y(s) = \frac{A_1 e^{-st_0}}{s - r_1} + \frac{A_2 e^{-st_0}}{s - r_2} + \ldots + \frac{A_k e^{-st_0}}{s - r_k}$$

- *Multiple delays:*

$$Y(s) = \left[\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\right] e^{-st_{01}} + \left[\frac{N_2(s)}{D_2(s)}\right] e^{-st_{02}} + \ldots. \quad = [Y_1(s)]e^{-st_{01}} + [Y_2(s)]e^{-st_{02}} + \ldots.$$

$y(t) = y_1(t - t_{01}) + y_2(t - t_{02}$

Contoh:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = f(t) \text{ dengan } c(0) = 0 \quad \text{tentukan responnya untuk:}$$

a) Perubahan unit step pada $t = 1$: $f(t) = u(t - 1)$

b) Fungsi tangga berundak *(staircase)* dari unit step pada setiap satuan waktu:

$f(t) = u(t - 1) + u(t - 2) + u(t - 3) + \ldots.$

Jawab:

$sC(s) + 2C(s) = F(s)$

a) $u(t - 1)] = e^{-s}.\, {}^{1}\!/_{s}$

b) $F(s)$ $u(t - 1) + u(t - 2) + u(t - 3) + \ldots.$

$= {}^{1}\!/_{s}\,(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \ldots)$

$$C(s) = \frac{1}{s+2} F(s) \text{ , } maka$$

$$i) \quad C(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s} e^{-s} = C_1(s)e^{-s}$$

$$C_1(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s}$$

$A_1 = -1/2$ *dan* A_2

c_1 $^{-2t}$

$\boldsymbol{c(t) = c_1(t - 1 \qquad 1)[1 - e^{-2(t-1)}]}$

Catatan: *unit step u(t - 1) harus juga dikalikan dengan fungsi eksponensial untuk mengindikasikan bahwa -c(t)* = 0 *untuk t<1*

ii) Untuk fungsi *staircase* kita lihat bahwa

$$C(s) = \left[\frac{1}{s+2}\frac{1}{s}\right]\left(e^{-s} + e^{-2s} + ...\right)$$

$$= C_1(s)e^{-s} + C_1(s)e^{-2s}$$

$$c(t) = c_1(t\text{-}1) + c_1(t\text{-}2$$

$$= \quad \mathbf{1)[1 - e^{-2(t-1)}] + \quad 2)[1 - e^{-2(t-2}}$$

No.	Denominator *Y(s)*	Fraksi Parsial	*y(t)*
i)	Akar tidak berulang	$\frac{a}{s-r}$	Ae^{rt}
ii)	Akar konjugasi kompleks	$\frac{A(s-r)+Bw}{(s-r)^2+B^2}$	$e^{rt}(Acos\ wt + Bsin\ wt)$
iii)	Akar berulang	$\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{(s-r)^i}$	$e^{rt}\sum_{i=1}^{m}A_i\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}$
iv)	Dead time: $Y_1(s)e^{-sto}$		$y_1(t - t_0)$

2. 4 EIGENVALUES DAN KESTABILAN

Persamaan Karakteristik dari PD dan dari sistem yang memiliki respon dinamik adalah

$$a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} \qquad {}_1s + a_0 = 0$$

dengan a_o, a_1, a_2, ... a_n adalah, koefisien variabel tergantung dan turunannya pada PD.

Eigenvalues: eigen (Jerman) berarti karakteristik atau **diri,** merupakan *akar-akar* persamaan karakteristik.

Pentingnya e.v:

1. Merupakan definisi sifat PD.
2. Tidak tergantung masukan forcing function.
3. Menentukan apakah respon waktunya monoton (kasus 1 dan 3) atau berosilasi (kasus 2).
4. Menentukan apakah respon tersebut stabil atau tidak.

PD disebut stabil bila respon waktunya tetap terbatas untuk forcing function yang terbatas r harus negatif, agar nilai e^{rt} mengecil/terbatasi. Jadi agar stabil, maka semua e.v harus punya harga r negatif.

2.5 MENCARI AKAR POLINOMIAL

Beberapa metode yang biasa digunakan:

1. Metode Newton

   Cocok untuk perhitungan manual, khususnya bila dikombinasikan dengan metode *Nested Multiplication.*
2. Metode Newton-Bairstow

   Cocok untuk konjungasi kompleks dan akar nyata ➔kalkulator yang bisa diprogram.
3. Metode Muller

   Cocok untuk mencari akar nyata ataupun kompleks ➔komputer

Di sini hanya dibicarakan metode Newton saja.

Polinomial derajat ke-n:

$$f_n(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} \qquad {}_1 s + a_0$$

Syarat: $f_n(s) = 0$ atau ada toleransi kesalahannya

Rumus iterasinya: $$s_{k+1} = s_k - \frac{f(s_k)}{f'(s_k)}$$

Polinomial derajat ke-$(n-1)$: $$f_{n-1}(s) = \frac{f_n(s)}{s - r_1},$$

r_1 = akar yang sudah diperoleh

Dengan *Nested Multiplication* (memperbaiki Newton):

- tidak perlu mencari $f(s_k)$ dan $s_k)$
- tidak perlu mencari $f_{n-1}(s)$ dengan rumus di atas

Kalkulasi yang dilakukan:

1. $b_n = a_n$ dan $c_n = b_n$
2. untuk $i = n\text{-}1, n\text{-}2, ...1,0$ ➔ $b_i = a_i + b_{i+1}s_k$
3. untuk $i = n\text{-}1, n\text{-}2 \quad 1$ ➔ $c_i = b_i + c_{i+1}s_k$
4. $f(s_k) = b_0$ dan $s_k) = c_1$
5. $f_{n-1}(s) = b_n s^{n-1} + b_{n-1}s^{n-2} \qquad {}_2 s + b_1$

Contoh:

$$\frac{d^3c(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 4c(t) = 4d(t)$$

$$s^3C(s) + 2s^2C(s) + 3sC(s) + 4C(s) = 4.1$$

$$C(s) = \frac{4}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

$f(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$

Aproksimasi awal: $s_o = -1$

Iterasi 1

	(3)	(2)	(1)	(0)
	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = 3$	$a_0 = 4$
$s_0 = -1$		$b_3s=-1$	$b_2s=-1$	$b_1s=-2$
	$b_3 = 1$	$b_2 = 1$	$b_1 = 2$	$b_0 = 2 = f(-1)$
		$c_3s=-1$	$c_2s=0$	
	$c_3 = 1$	$c_2 = 0$	$c_1 = 2$	$1)$

Iterasi 5

$$
\begin{array}{lllll}
 & (3) & (2) & (1) & (0) \\
 & a_3 = 1 & a_2 = 2 & a_1 = 3 & a_0 = 4 \\
s_4 = -1,651 & \downarrow & \underline{b_3 s = -1,651} & \underline{b_2 s = -0,577} & \underline{b_1 s = -4} \\
 & b_3 = 1 \nearrow & b_2 = 0,349 \nearrow & b_1 = 2,423 \nearrow & b_0 = 0 \\
 & & & & = f(-1,651)
\end{array}
$$

$f_2(s) = s^2 + 0,349s + 2,423$

$$r_{2,3} = \frac{-0,349 \pm \sqrt{0,1218 - 4(2,423)}}{2.1} = -0,174 \pm 1,547i$$

$$C(s) = \frac{4}{(s+1,651)(s+0,174-1,547i)(s+0,174+1,547i)}$$

$$= \frac{A_1}{(s+1,651)} + \frac{A_2(s+0,174) + A_3 1,547}{(s+0,174)^2 + 1,547^2}$$

$A_1 = 0,875$ $A_2 = -0,874$ dan $A_3 = 0,834$

maka:

$$\boldsymbol{c(t) = 0,875e^{-1,651t} + e^{-0,174t}(-0,874 \cos 1,547t + 0,834 \sin 1,547t)}$$

2.6 LINEARISASI DAN VARIABEL DEVIASI

Transformasi Laplace (TL) hanya dipakai pada PD linear

Proses di industri $\Rightarrow$ nonlinear

Agar TL bisa digunakan, maka harus ada: LINEARISASI. Ini memunculkan satu vaeiabel baru: *variabel deviasi/pasturbasi.*

Asumsi dasar:

Respon aproksimasi linear mewakili respon proses pada daerah sekitar titik operasi *(operating point/base point)*

Variabel deviasi:

Beda antara harga suatu variabel/sinyal dan harga titik operasi.

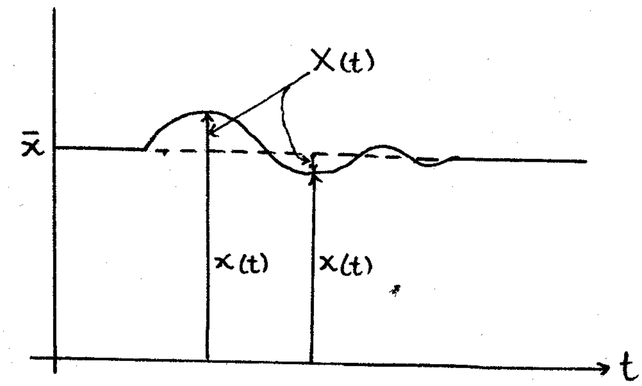
$$\mathbf{X}(t) = x(t) - \bar{x}$$

dengan:

$\mathbf{X}(t)$: variabel deviasi

$x(t)$: variabel absolut

$\bar{x}$: harga x pada titik operasi



variabel deviasi:
deviasi suatu variabel dari harga titik operasinya.
Transformasi dari absolut ke harga deviasi dari suatu variabel ekivalen dengan menggerakkkan nol pada aksis variabel tsb. ke base value.

$\bar{x}$: konstanta ⇨ $\dfrac{d^n\mathbf{X}(t)}{dt^n} = \dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$ untuk $n = 1, 2, 3$

: harga awal *(initial value)* ⇨ biasanya : pada keadaan tunak *(steady state)*

⇨ $x(0) = \bar{x}$ $\mathbf{X}(0) = 0$

$$\frac{d^n\mathbf{X}(0)}{dt^n} = 0 \quad untuk \;\; n = 1, 2, 3$$

$$\left[\frac{d^n\mathbf{X}(t)}{dt^n}\right] = s^n\mathbf{X}(s)$$

Segi lain: konstanta hilang dari PD linearisasi, jika base value adalah initial steady state condition

1. Linearisasi Fungsi Satu Variabel

PD orde satu: $\dfrac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] + k$ **(2-56)**

f[x(t)] : fungsi nonlinear dari x

k : konstanta

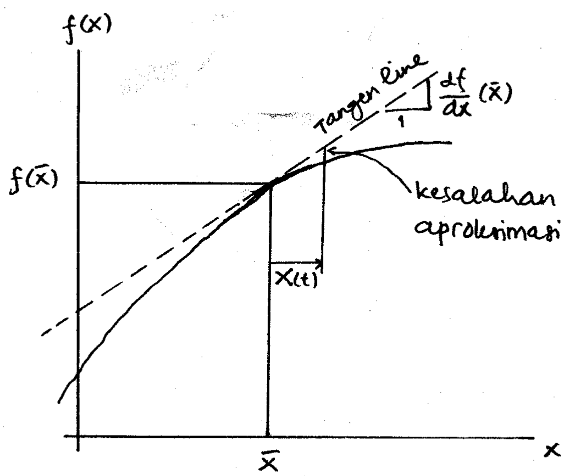
Deret Taylor:

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}]^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}]^3 + \ldots.. \quad (2\text{-}57)$$

eliminasi pangkat dua ke atas (harganya terlalu kecil):

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})\mathbf{X}(t) \quad (2\text{-}58)$$

$$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})[x(t) - \bar{x}] \quad (2\text{-}59)$$



Beda antara aproksimasi linear dan fungsi aktual:

- Kecil: dekat titik operasi
- Besar: jauh dr ttk operasi

Daerah di mana aproksimasi linear cukup akurat untuk menggambarkan fungsi nonlinear sulit ditaksir. Makin nonlinear, makin kecil daerahnya.

Substitusi persamaan 2-59 ke 2-56:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})\mathbf{X}(t) + k \quad (2\text{-}60)$$

Kondisi awal: $x(0) = 0,\ \frac{dx}{dt}(0) = 0,$ dan $\mathbf{X}(0) = 0$

Maka: $0 = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x})(0) + k$

$$f(\bar{x}) + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{df}{dx}(\bar{x})\mathbf{X}(t) \quad (2\text{-}61)$$

(tidak ada konstanta)

Tahap intermediet bisa diabaikan, bisa langsung dari pers. 2-56 ke pers. 2-61.

Contoh-contoh fungsi nonlinear:

1. Arrhenius: $k(T) = k_0 e^{-(E/RT)}$
2. Vapor Pressure (Persamaan Antoine): $p^0(T) = e^{[A-B/(T+C)]}$
3. Kesetimbangan uap-cair (relative volatility): $y(x) = \dfrac{ax}{1+(a-1)x}$
4. Pressure drop melalui fitting dan pipa: $\Delta P(F) = kF^2$
5. Laju perpindahan panas (radiasi): $q(T) = esAT^4$
6. Enthalpi: $H(T) = H_0 + AT + BT^2 + CT^3 + DT^4$

Linearisasi persamaan Arrhenius:

$$k(T) = k_0 e^{-(E/RT)}$$

$$kT) = k(\overline{T}) + \frac{dk}{dT}(\overline{T})(T - \overline{T})$$

$$\frac{dk}{dT}(\overline{T}) = k_0 e^{-(E/R\overline{T})}\left(\frac{E}{R\overline{T}^2}\right) = k(\overline{T})\frac{E}{R\overline{T}^2}$$

$$k(T) \cong k(\overline{T}) + k(\overline{T})\frac{E}{R\overline{T}^2}(T - \overline{T})$$

$$\mathbf{K}(T) \cong \left[k(\overline{T})\frac{E}{R\overline{T}^2}\right]\mathbf{T} \quad \text{di mana}$$

$$\mathbf{K}(T) = k(T) - k(\overline{T}) \text{ dan } \mathbf{T} = T - \overline{T}$$

Jika:

$k_0 = 8.10^9\ s^{-1}$, $E = 22.000\ cal/gmol$, $\overline{T} = 373\ K$,

dan $R = 1{,}987\ cal.g.mol.K$

maka:

$$k(\overline{T}) = 8.10^9.e^{-(22000/1{,}987x373)} = 1{,}0273x10^{-3}\ s^{-1}$$

$$\frac{dk}{dT}(\overline{T}) = \left(1{,}0273x10^{-3}\right)\frac{22000}{1{,}987x373^2} = 8{,}175x10^{-5}$$

persamaan yang dilinearisasi:

$$k(T) = 1{,}0273x10^{-3} + 8{,}175x10^{-5}(T - 373)$$

$$\mathbf{K}(T) \cong 8{,}175x10^{-5}\,\mathbf{T}$$

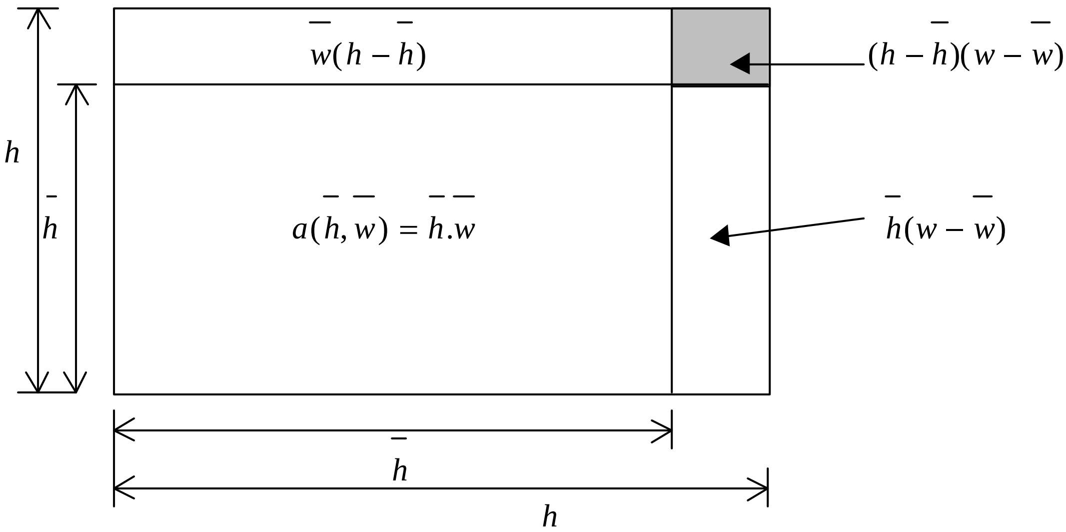
2. Linearisasi Fungsi Dua Variabel atau Lebih

Deret Taylor:

$$f[x(t),y(t)] = f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})[x(t)-\bar{x}] + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})[y(t)-\bar{y}] + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})[x(t)-\bar{x}]^2$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})[y(t)-\bar{y}]^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x},\bar{y})[x(t)-\bar{x}][y(t)-\bar{y}] + \ldots\ldots \qquad (2-62)$$

Aproksimasi linear orde 2 dan orde tinggi (pers. 2-63):

$f[x(t),y(t)] = f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})[x(t)-\bar{x}] + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})[y(t)-\bar{y}]$ Kesalahan aproksimasi linear kecil pada x dan y di dekat $\bar{x}$ dan $\bar{y}$.



Luas bujur sangkar sebagai fungsi h dan w: $a(h,w) = nw$

$$\frac{\partial a}{\partial h} = w \qquad\qquad \frac{\partial a}{\partial w} = h$$

Aproksimasi linear: $\partial(h,w) = \partial(\bar{h},\bar{w}) + \bar{w}(h-\bar{h}) + \bar{h}(w-\bar{w})$

Kesalahan: bujur sangkar kecil yang luasnya

$$(h-\bar{h})(w-\bar{w})$$

Kesalahan akan kecil bila h dan w dekat dengan $\bar{h}$ dan $\bar{w}$.

Variabel deviasi: $A(h,w) \cong \bar{w}H + \bar{h}W$

Rumus umum fungsi n variabel x_1, x_2 , x_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \overline{\frac{\partial f}{dx_1}}(x_1 - \bar{x}_1) + \overline{\frac{\partial f}{dx_2}}(x_2 - \bar{x}_2) + \ldots\ldots + \overline{\frac{\partial f}{dx_n}}(x_n - \bar{x}_n) \qquad (2\text{-}64)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \sum_{k=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{dx_k}}(x_k - \bar{x}_k)$$

di mana $\overline{\frac{\partial f}{dx_k}}$ merupakan turunan parsial yang dievaluasi pada $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

CONTOH:

1. Tentukan aproksimasi linear dari fungsi non-linear:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 - 3\frac{y}{z} \quad \text{pada} \quad \bar{x} = 1, \bar{y} = 2, \bar{z} = 3$$

$$f(x, y, z) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}(x - \bar{x}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(y - \bar{y}) + \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(z - \bar{z})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - \frac{3}{2}, \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3y}{z^2}$$

base point: $\bar{f} = 2(1)^2 + 1(2)^2 - 3\frac{2}{3} = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2}{3}$$

Fungsi yang dilinearisasi:

$$f(x, y, z) = 4 + 8(x - 1) + 3(y - 2) + \frac{2}{3}(z - 3)$$

$$\mathbf{F} = 8\mathbf{X} + 3\mathbf{Y} + \frac{2}{3}\mathbf{Z}$$

2. Densitas gas ideal: $r = \frac{Mp}{RT}$, M (udara) = 29,

$\bar{p}$ =101.3 N/m^2, $\bar{T}$ = 300 K, dan R = 8.314 N.m/kg.mol.K

Maka:

$$\boldsymbol{r} = \bar{\boldsymbol{r}} + \overline{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial T}}(T - \bar{T}) + \overline{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial p}}(p - \bar{p})$$

$$\frac{\partial r}{\partial T} = -\frac{Mp}{RT^2} = -\frac{r}{T}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial p} = \frac{M}{RT} = \frac{\boldsymbol{r}}{p}$$

base condition:

$$\bar{r} = \frac{M\bar{p}}{R\bar{T}} = 1.178$$

$$\overline{\frac{\partial r}{\partial T}} = -\frac{\bar{r}}{\bar{T}} = -\frac{1.178}{300} = -0.00393$$

$$\overline{\frac{\partial r}{\partial p}} = \frac{\bar{r}}{\bar{p}} = \frac{1.178}{101{,}300} = 1.163\,x10^{-5}$$

Persamaan yang dilinearisasi:

$$\boldsymbol{r} = 1.178 - 0.00393(T - 300) + 1.163x10^{-5}(p - 101300)$$

R = -0.00393**T** + 1.163x10^{-5}