BAB 7

DISAIN KONTROL BERUMPAN-BALIK LUP TUNGGAL KLASIK

7. 1 Teknik Tempat Kedudukan Akar (Root Locus)

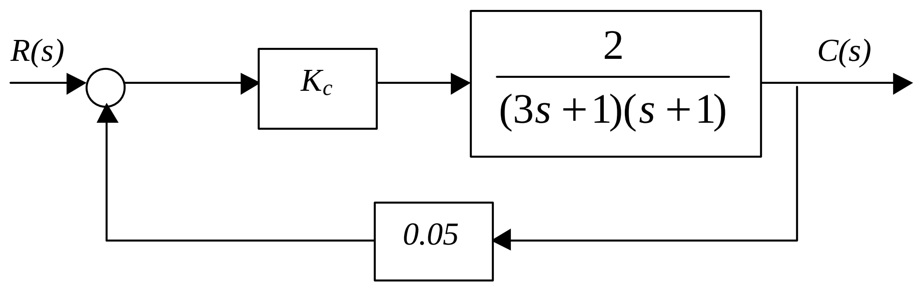
Root Locus : teknik secara grafik yang terdiri atas penggrafikan akar-akar pers. karakteristik (eigenvalue), sebagai fungsi gain atau perubahan parameter lup lainnya.

Hasil grafik: pandangan sekilas apakah akar-akar pers. karakteristik memotong sumbu imajiner dari sisi kiri ke sisi kanan *s plane.* Ini mengindikasikan kemungkinan ketidakstabilan lup kontrol.

Contoh 7.1:

Perhatikan diagram blok lup kontrol pada Gambar 7.1. Pers. karakteristik untuk sistem tersebut:

$$1+\frac{K_c}{(3s+1)(s+1)} = 0 \text{ atau } 1 + \text{OLTF} = 0$$



Gambar 7.1 Diagram blok untuk contoh 7.1

OLTF (open-loop transfer function) = $\dfrac{K_c}{(3s+1)(s+1)}$

Pole: -1/3 dan 1

Zero: tidak ada

Pole dan zero

$$G(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

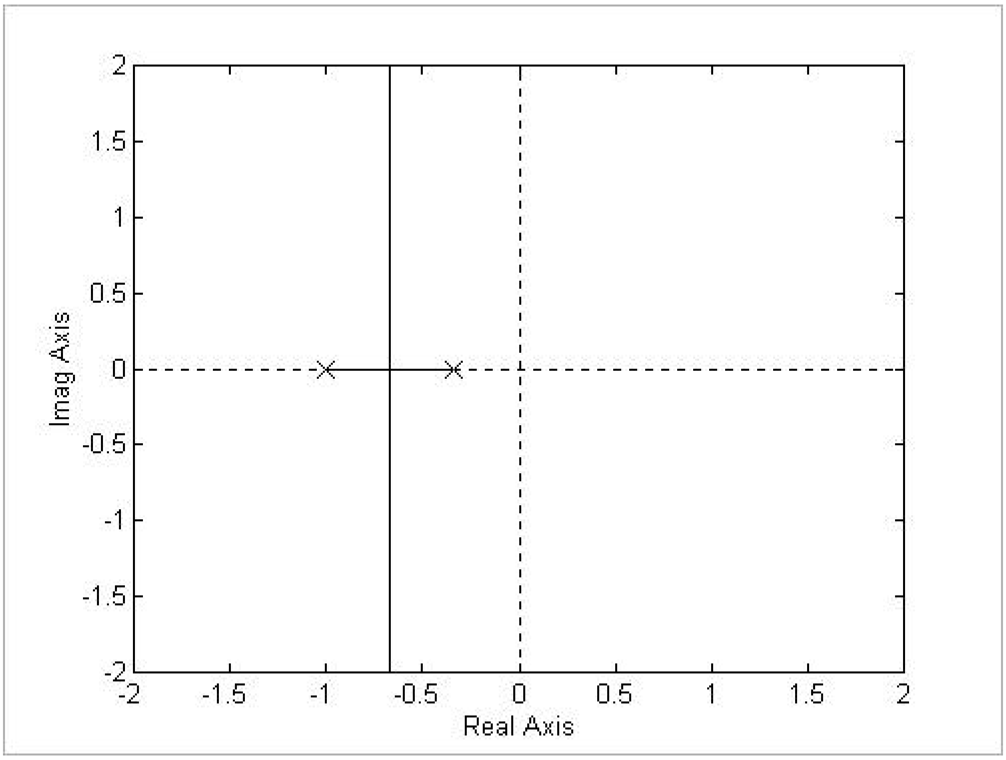
Titik-titik pada bidang *s (s plane)* yang menyebabkan fungsi *G(s)* analitik disebut titik *ordiner (ordinary)*, sedangkan titik-titik pada bidang s yang menyebabkan fungsi *G(s)* tidak analitik disebut titik *singuler (singular)*. Titik-titik singuler yang menyebabkan fungsi *G(s)* atau turunan-turunannya mendekati tak terhingga disebut ***pole***. Pada persamaan di atas pole-nya: $s = -p_1$ dan $s = -p_2$.

Titik-titik yang menyebabkan fungsi *G(s)* sama dengan nol disebut ***zero***. Pada persamaan di atas, zeronya: $s = -z$.

$3s^2 + 4s + (1 + K_c) = 0$

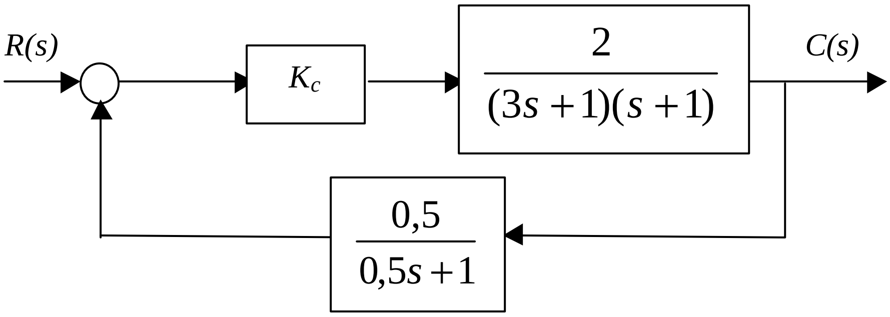
$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12(1+K_c}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{1-3K_c}$$

Dengan memasukkan harga K_c dari 0 dst., maka didapat gambar:



Gambar 7.2 Diagram root locus untuk Gambar 7.1 dengan menggunakan Matlab

Contoh 7.2:



Gambar 7.3 Diagram blok untuk contoh 7.2

Persamaan karakteristik :

OLTF = $1+\dfrac{K_c}{(3s+1)(s+1)(0,5s+1)}=0$

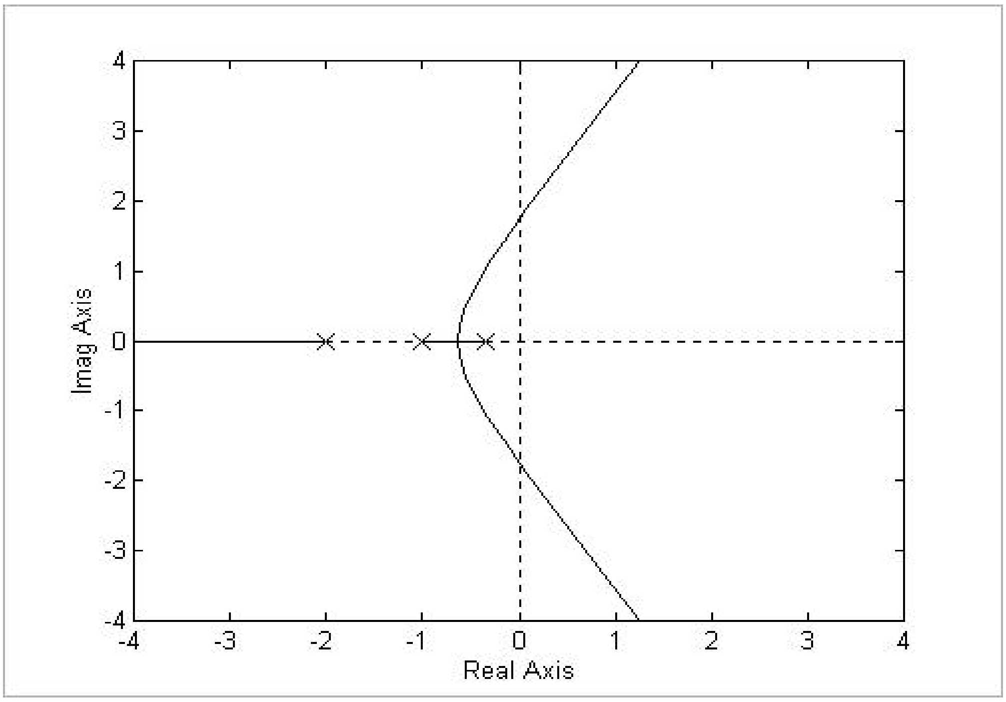
pole: -1/3, -1, -2; n (jumlah pole) = 3

zero: tidak ada; m (jumlah zero) = 0

cara menggambar:

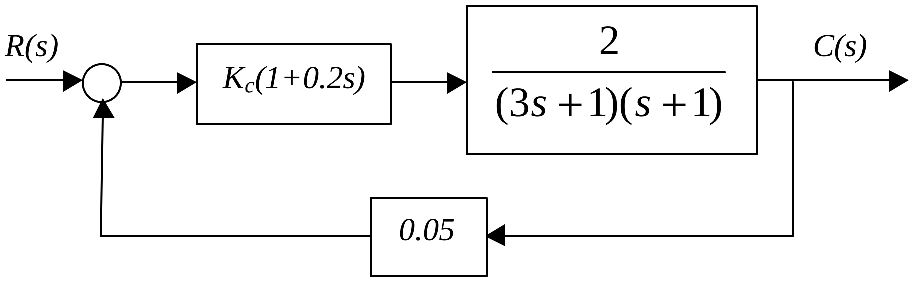
- Tandai pole dengan silang dan zero dengan lingkaran kecil.
- Cek daerah di sebelah kiri titik paling kiri: jika selisih antara ganjil ⇒ tempat kedudukan, genap ⇒ bukan tempat kedudukan. Cek lagi daerah di sebelahj kanannya, dst.
- Untuk mencari titik potong dengan sumbu imajiner ⇒ direct susbtitution method
- Jika di antara 2 pole merupakan tempat kedudukan, maka ada *breakaway point*
- Jika di antara pole dan zero atau zero dan ∞ merupakan tempat kedudukan ⇒ *breakin point*
- Jumlah pole ⇒ jumlah cabang (loci)
- Jumlah cabang menuju ∞ = jumlah jumlah zero
- Garis selalu dari pole menuju zero atau ∞

ambarnya:



Gambar 7.4 Root locus untuk Gambar 7.3 dengan Matlab

Contoh 7.3:



Gambar 7.5 Diagram blok untuk contoh 7.3

Persamaan karakteristik :

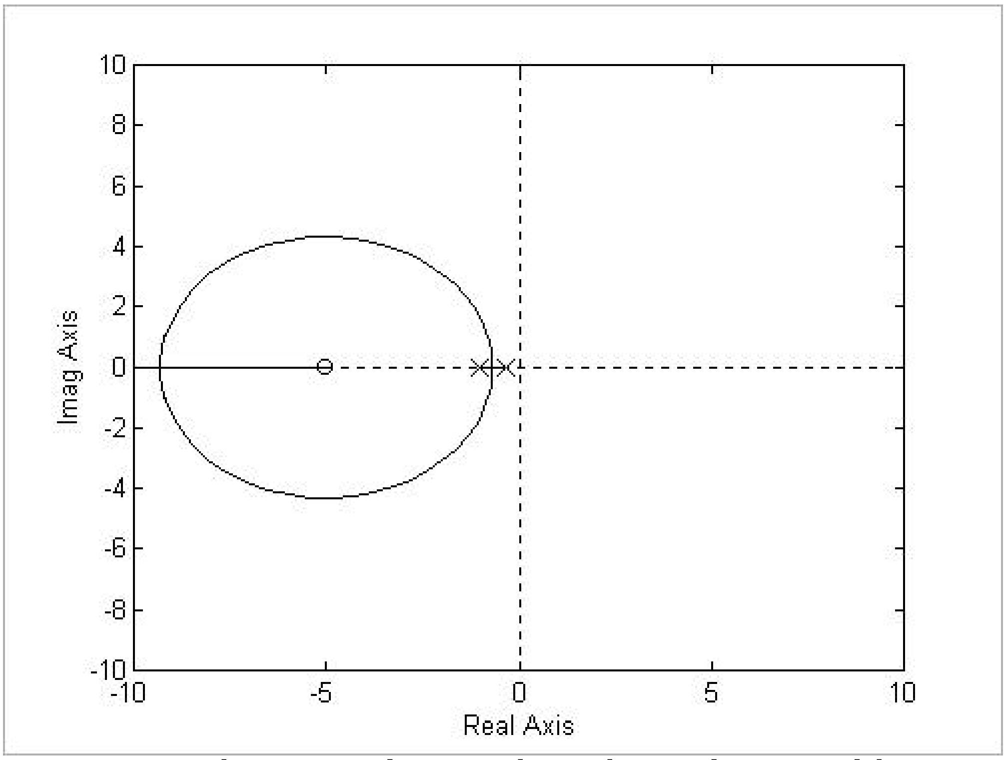
$$1+\frac{K_c(1+0,2s)}{(3s+1)(s+1)}=0$$

$3s^2 + (4 + 0,2K_c)s + (1 + K_c) = 0$

$$r_1, r_2 = \frac{-(4+0,2K_c) \pm \sqrt{4-10,4K_c+0,04K_c^{\,2}}}{6}$$

$$\text{OLTF} = \frac{K_c(1+0,2s)}{(3s+1)(s+1)}$$

Pole: -1/3 dan 1 → n = 2; Zero: -5 → m = 1



Gambar 7.6 Root locus untuk Gambar 7.5 dengan Matlab

- **Aturan Penggambaran Root Locus**

1. Pada real axis tempat kedudukan berada pada titik di mana pole dikurangi zero berharga ganjil untuk sebelah kanan titik.
2. Loci akar selalu berasal, untuk total gain lup = 0, pada pole OLTF.
3. Jumlah loci atau cabang sama dengan jumlah pole OLTF (n).
4. Semakin naik total gain lup, loci atau cabang akan mendekati zero OLTF atau ∞. Jumlah loci menuju ∞
5. Loci yang menuju ∞ sepanjang garis asimtot. Semua garis asimtot harus melewati *center of gravity* (CG) dari pole dan zero OLTF.

$$CG = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

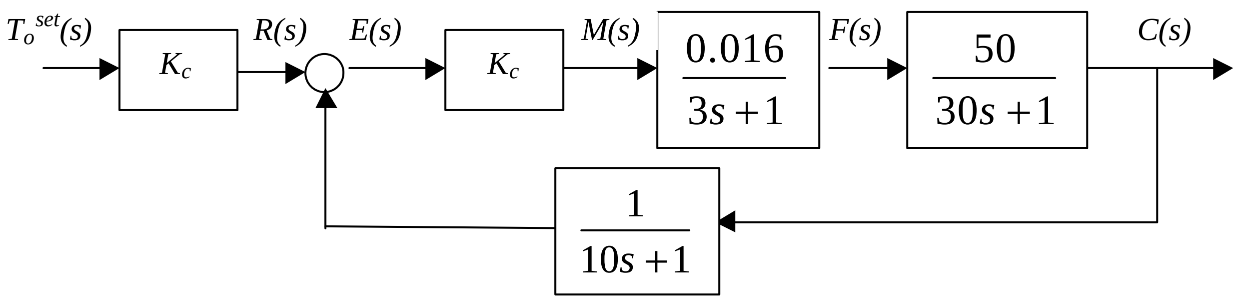
Asimtot membuat sudut dengan sumbu real:

$$f = \frac{180^0 + (360^0)k}{n-m} \quad \text{dengan } k = 0, 1 \qquad 1$$

1. Titik-titik pada sumbu real di mana loci bertemu atau meninggalkan, atau masuk dari daerah kompleks pada bidang s, disebut *breakaway point*.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s - p_j}$$

Contoh 7.4



Gambar 7.7 Diagram blok untuk contoh 7.4

Persamaan karakteristik : $1 + \frac{0,8K_c}{(10s+1)(30s+1)(3s+1)} = 0$

$$\text{OLTF} = \frac{2}{(3s+1)(s+1)}$$

$$OLTF = \frac{K'}{\left(s+\frac{1}{10}\right)\left(s+\frac{1}{30}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$

pole: -1/10, -1/30, dan 1/3 $\Rightarrow$ n = 3

zero: tidak ada $\Rightarrow$ m = 0

$$K' = \frac{0{,}8K_c}{(10)(30)(3)} = 0{,}000888K_c$$

$$CG = \frac{\frac{-1}{10} - \frac{1}{30} - \frac{1}{3}}{3-0} = -0{,}155$$

$$f = \frac{180^0 + 360^0(0)}{3}, \quad \frac{180^0 + 360^0(1)}{3}, \quad \frac{180^0 + 360^0(2)}{3}$$

$$f = 60^0,\ 180^0,\ 300^0$$

Breakaway point: $\frac{1}{s+\frac{1}{30}} + \frac{1}{s+\frac{1}{10}} + \frac{1}{s+\frac{1}{3}} = 0$

Dengan menyamakan penyebut $\Rightarrow$ pers. kuadrat

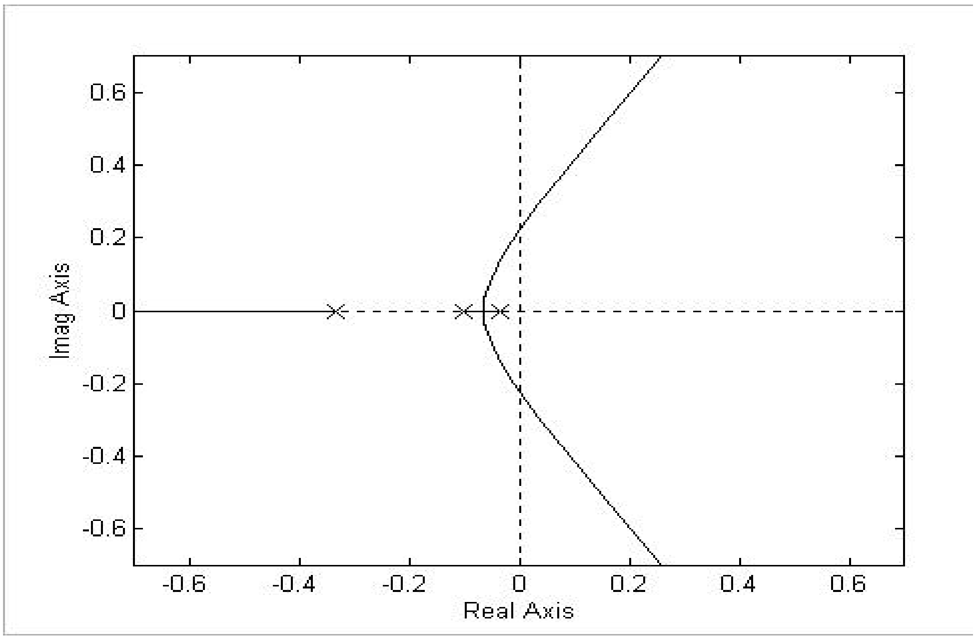
s = -0,247 (tidak mungkin, karena tidak di antara dua titik) dan

s = -0.063 (valid)

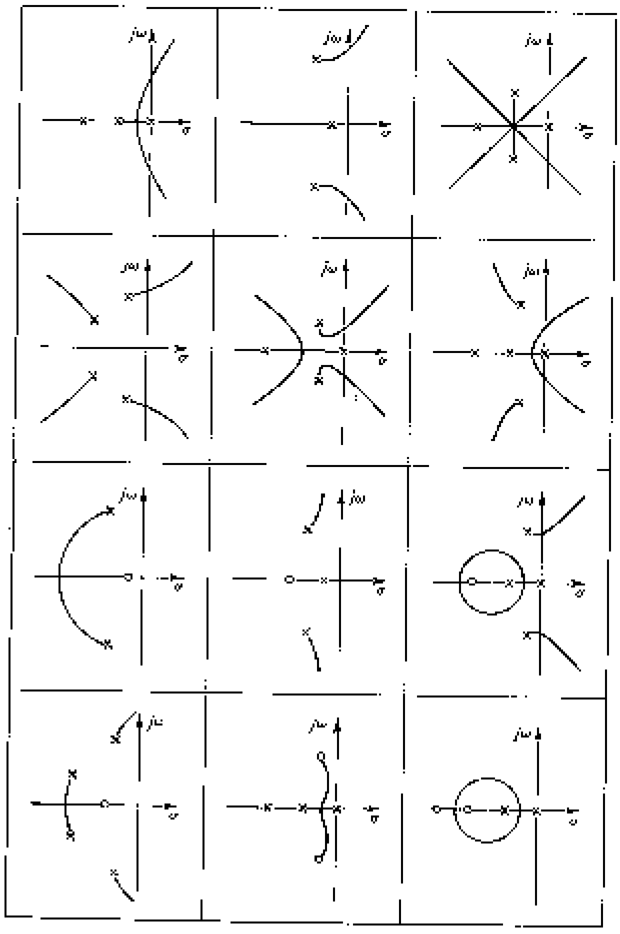
$w_u = \pm 0{,}22$

$K_{cu} = 24$

Gambarnya :

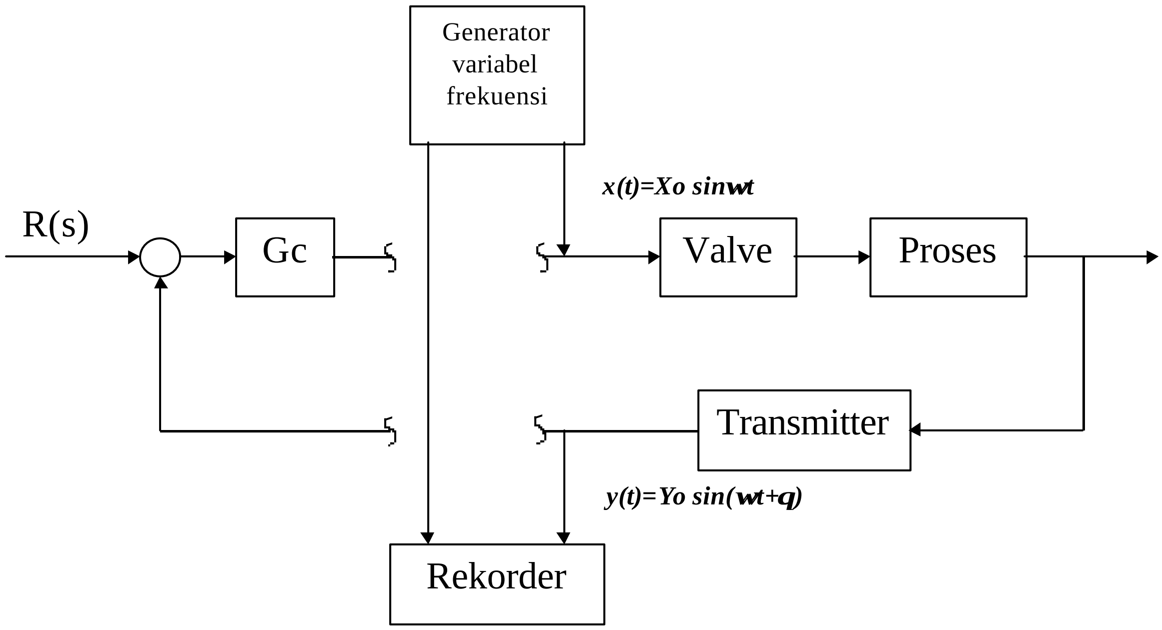


Gambar 7.8 Root locus untuk Gambar 7.7 dengan Matlab

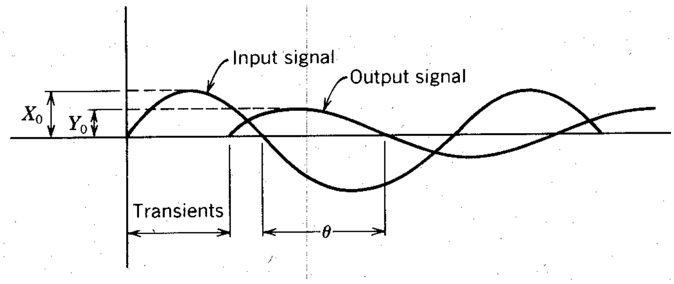


Tabel 7.9 Konfigurasi Pole-Zero

7.2 Teknik Respon Frekuensi (Bode Plots)



Gambar 7.9 Diagram blok gnerator variabel-frekuensi dan rekorder



Gambar 7.10 Rekaman tes sinusiodal

Sistem orde-satu: $G(s) = \dfrac{K}{ts+1}$

substitusikan $s = iw$: $G(s) = \dfrac{K}{iwt+1}$

Dapat ditulis: $G(iw) = \dfrac{G_1}{G_2} = \dfrac{K}{iwt+1}$

- Amplitudo ratio (AR) $= \dfrac{\text{amplitudo sinyal keluaran}}{\text{amplitudo sinyal masukan}} = \dfrac{Yo}{Xo} = \dfrac{|G_1|}{|G_2|}$
- Magnitude ratio (MR) = $\dfrac{AR}{K}$
- Sudut fasa (θ) = $\tan^{-1}(-\omega\tau)$

Untuk *OLTF orde-satu* yang umum:

$$OLTF(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(t_i s + 1)e^{-t_0 s}}{s^k \prod_{j=1}^{n}(t_j s + 1)}, \qquad \text{untuk } (n + k) > m$$

substitusikan $s = iw$: $OLTF(iw) = \dfrac{K\prod_{i=1}^{m}(it_i w + 1)e^{-it_0 w}}{(iw)^k \prod_{j=1}^{n}(it_j w + 1)}$

maka: $AR = \dfrac{K\prod_{i=1}^{m}|it_i w + 1|}{|(iw)^k|\left|\prod_{j=1}^{n}|it_j w + 1|\right|}$ atau $AR = \dfrac{K\prod_{i=1}^{m}[(t_i w)^2 + 1]^{1/2}}{w^k \prod_{j=1}^{n}[(t_j w)^2 + 1]^{1/2}}$

dan $$q = \sum_{i=1}^{m}\tan^{-1}(t_i w) - t_0 w\left(\frac{180^o}{p}\right) - \sum_{j=1}^{m}\tan^{-1}(t_j w) - k(90^o)$$

Untuk *OLTF orde-dua*: $G(s) = \dfrac{K}{t^2 s^2 + 2txs + 1}$

$$G(iw) = \frac{K}{-w^2 t^2 + i2txw + 1} = \frac{K}{(1 - w^2 t^2) + i2txw}$$

$$AR = \frac{K}{\sqrt{(1 - w^2 t^2)^2 + (2txw)^2}}$$

$$q = -\tan^{-1}\left(\frac{2txw}{1 - w^2 t^2}\right)$$

• **Bode Plot** : penggambaran grafik fungsi AR (MR) dan sudut fasa (θ) yang paling umum.

$\Rightarrow$ terdiri dari 2 grafik:

(1) log AR (or log MR) vs. log ω

(2) θ vs. Log ω

$\Rightarrow$ beberapa panduan penggambaran Bode: untuk OLTF yang terdiri atas beberapa fungsi orde-satu, maka digambar terlebih dahulu masing-masing fungsi orde-satu tersebut secara terpisah, setelah itu baru dibuat gambar gabungannya dengan menjumlahkan slope (gradien)-nya

(1) Garis pada MR, masukkan:

$\omega = 0 \Rightarrow MR = 1 \Rightarrow \log MR = 0$ (garis horisontal atau slope-nya nol); untuk s^k slope-nya $(-1)k$

$\omega = \infty \Rightarrow \log MR = \pm \log \tau \pm \log \omega$ (slope = ±1)

$\omega = \frac{1}{t}$ *(corner frequency/breakpoint frequency)* untuk titik potong garis pertama ($\omega = 0$) dan garis kedua ($\omega = \infty$)

(2) Garis pada θ, masukkan:

$\omega = 0$ didapatkan $\theta = 0$

$\omega = \infty$ didapatkan $\theta = \pm 90^o$

$\omega = \frac{1}{t}$ didapatkan $\theta = \pm 45^o$

untuk s^k hanya ada satu sudut: $\theta = -90^o$

untuk deadtime: $\theta = (-57.3^o)\omega$

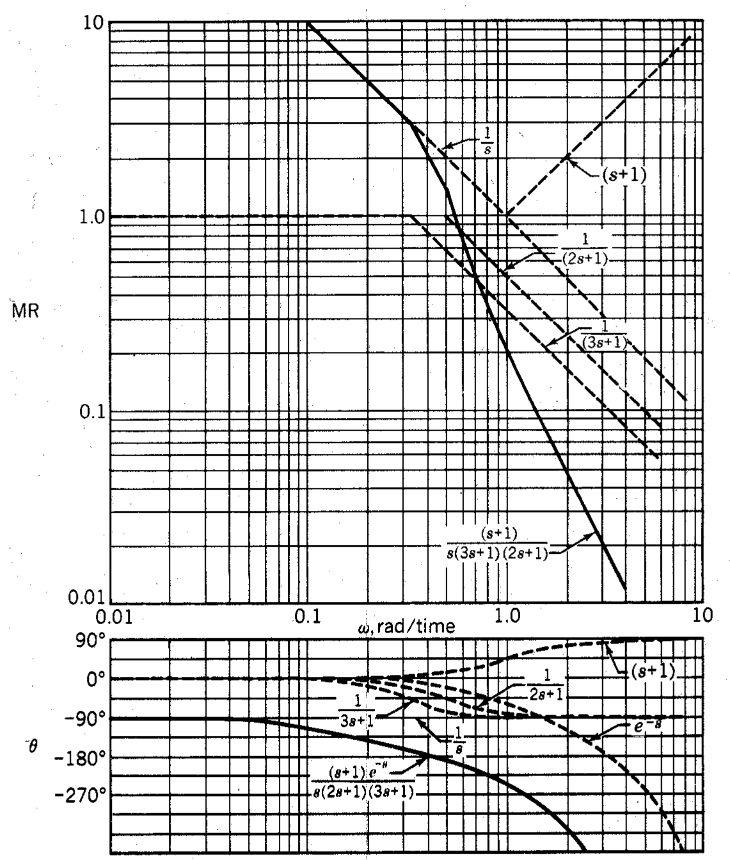
Contoh:

Gambar Bode untuk fungsi alih $G(s) = \dfrac{K(s+1)e^{-s}}{s(2s+1)(3s+1)}$ adalah $MR = \dfrac{\sqrt{w^2+1}}{w\sqrt{4w^2+1}\sqrt{9w^2+1}}$

log MR = log $(\omega^2 + 1)^{1/2}$ - log (ω) - log $(4\omega^2 + 1)^{1/2}$ - log $(9\omega^2 + 1)^{1/2}$

dan $\theta = \tan^{-1}(\omega) - (180^o/\pi)\omega - 90^o - \tan^{-1}(2\omega) - \tan^{-1}(3\omega)$

Gambar Bode-nya adalah:



Gambar 7.11 Gambar Bode untuk contoh di atas

Untuk fungsi alih yang umum:

$$G(s) = \frac{K\left(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + 1\right)}{s^k \left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + 1\right)}, \quad (n + k) > m$$

$\Rightarrow$ slope asimtot frekuensi-rendah:

$$\text{slope AR (MR)}\Big|_{w \to 0} \to (-1)k$$

dan sudutnya: $q \,\Big|_{w \to 0} \to (-90^o)k$

$\Rightarrow$ slope asimtot frekuensi-tinggi:

$$\text{slope AR (MR)}\Big|_{w \to \infty} \to (n + k - m)(-1)$$

dan sudutnya: $q \,\Big|_{w \to \infty} \to (n + k - m)(-90^o)$

Sistem yang mengikuti slope dan sudut seperti aturan di atas disebut *sistem fasa minimal (minimal phase systems).* Ada 3 pengecualian (disebut *sistem fasa nonminimal)*:

1. Sistem dengan deadtime: $G(s) = e^{-to.s}$
2. Sistem yang menunjukkan respon kebalikan (zero-nya positif): $G(s) = (1-t_1 s)/(1+t_2 s)$
3. Sistem tak-stabil lup terbuka (pole-nya positif), seperti reaktor eksotermik:

   $G(s) = 1/(1-ts)$

- **Kreiteria Kestabilan Respon Frekuensi**

Agar sistem kontrol stabil maka ratio amplitudo (AR) harus lebih kecil dari 1 (satu) pada sudut fasa -180^o (-π radian). K_{cu} terjadi bila AR = 1 pada θ = -180^o

Pada contoh di atas:

$\theta = -180^o \Rightarrow$ MR = 2 (ω = 0.4 rad/s)

MR = AR/K $\Rightarrow$ K = AR/MR

AR = 1 $\Rightarrow$ K_{cu}

Sistem akan stabil bila Kc lebih kecil dari