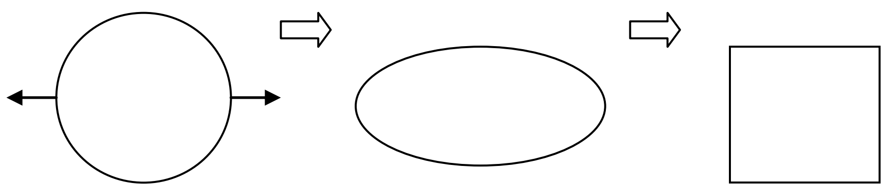
Pengantar Topologi - MK : Prinsip Matematika

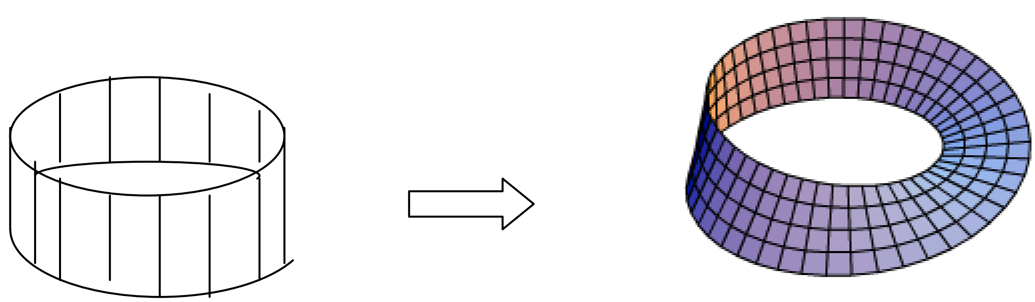
Topologi merupakan kajian pemetaan dari suatu obyek dalam ruang baik dalam struktur global maupun dalam struktur lokal yang lebih halus. Dapat dikatakan bahwa kajian ini merupakan perluasan kajian geometri, dengan mempertimbangkan baik himpunan titik-titiknya maupun keluarga himpunan-himpunan tersebut. Pertimbangan yang digunakan tersebut berupa sifat-sifat dalam konteks ruang (yang disebut kemudian dengan ruang topologi).

Dengan tinjauan awam, topologi merupakan kajian obyek geometri yang fleksibel, dengan mempertimbangkan proses deformasi obyek, seperti dapat ditekuk, ditarik keluar/kedalam tanpa mengakibatkan sobeknya (rusaknya) obyek tsb.
Kita dapat membayangkan bahwa pada bidang datar, apabila diberikan suatu lingkaran, maka elips yang dibentuk oleh lingkaran yang ditarik kedua sisinya, secara topologis adalah sama. Demikian juga suatu bola dan elipsoida yang terbentuk adalah sama secara topologis.



(1) (2) (3)

Gambar 1. Lingkaran – elips – bujur sangkar



(1) (2)

Gambar 2. Pita terhubung – pita Mobius

Dengan mempertimbangkan pendekatan dan arah observasi kajiannya, dapat diklasifikasikan beberapa subbidang kajian topologi, misalnya

- topologi himpunan-titik (*point-set topology*). Di sini dilakukan kajian terhadap sifat-sifat ruang dan pemetaannya,termasuk di dalamnya konsep kekompakan (*compactness*), keterhubungan (*connectedness*), dan ketercacahan (*countability*)

- topologi aljabar (*algebraic topology*). Di sini dalam kajiannya menggunakan struktur dalam aljabar abstrak (khususnya grup) yang di dalamnya dikaji ruang topologi dan pemetaan antar ruang. Di dalamnya diobservasi konsep homotopi dan homologi
- topologi geometri (*geometric topology*), yang melakukan kajian dari konsep *manifold* dan *emmbeding*-nya.

Kajian elementer topologi dilakukan pada subbidang pertama. Dalam hal ini, abstraksi geometrisnya dilakukan dengan mengabaikan jarak.(i.e bagian geometri yang bebas dari ukuran, bentuk permukaan (*shape*), atau lokasinya. Di dalamnya dilakukan penyelidikan dengan fondasi teoritis dalam himpunan untuk fungsi kontinu. Sedangkan dalam kajian himpunan digunakan konsep 'kedekatan' dari titik-titik yang diberikan.

Kajian elementer topologi ini biasanya berangkat dari
- topologi Euclidean, i.e topologi dalam ruang R^n, yang selanjutnya diperluas dengan
- topologi umum (*general topology*), topologi dalam ruang yang lebih umum

Sering juga kedua pendekatan di atas dilakukan sekaligus.
Dengan demikian, topologi himpunan-titik (*point-set topology*) di atas disebut juga dengan topologi umum (*general topology*).

Konsep inti dari topologi

(1) Topologi dan ruang topologi

Diberikan himpunan S, A : himpunan indeks.
Didefinisikan T = $\{T_\alpha \mid \alpha \in A\}$, keluarga himpunan dari subhimpunan dalam S, dengan sifat berikut:

(i) gabungan dari elemen-elemen dalam T juga merupakan elemen dalam T

$$\bigcup_{\alpha \in A} T_\alpha \in \mathrm{T}$$

(ii) irisan elemen-elemen dalam T juga merupakan elemen dalam T

$$\bigcap_{\alpha \in A} T_\alpha \in \mathrm{T}$$

(iii) $\varnothing$ dan S juga merupakan elemen dalam T

$$\varnothing, \mathrm{S} \in \mathrm{T}$$

T disebut dengan <u>topologi</u> (terhadap S), sedangkan pasangan {S, T} disebut dengan <u>ruang topologi</u>.

(2) metriks dan ruang metriks

Diberikan himpunan S. <u>Metriks</u> pada S merupakan fungsi d yang menghubungkan setiap pasangan elemen (p,q) $\in$ S dengan d(p,q), sedemikian sehingga

(i) $\forall$ p, q $\in$ S, d(p,q) $\geq$ 0. Dalam hal ini, d(p,q) = 0, jik-ka p = q
(ii) $\forall$ p, q $\in$ S, d(p,q) = d(q,p)
(iii) $\forall$ p, q, r $\in$ S, d(p,r) $\leq$ d(p,q) + d(p,r)

Pasangan {S,d) di atas disebut dengan ruang metrik.
(bandingkan dengan definisi jarak euclidean dan ruang euclidean!)

(3) Homeomorfisme

- fungsi homeomorfis

Diberikan $X \subseteq R^n$ dan $Y \subseteq R^m$
Fungsi f : X$\rightarrow$ Y disebut homeomorfis jika
(i) f merupakan korespondensi 1 – 1 antara X dan Y
(ii) f kontinu
(iii) invers f kontinu

- Dua himpunan homeomorfik

Diberikan $X \subseteq R^n$ dan $Y \subseteq R^m$.
X disebut homeomorfik pada Y, jika terdapat homeomorfisme dari X ke Y

- Ekivalent (secara) topologis

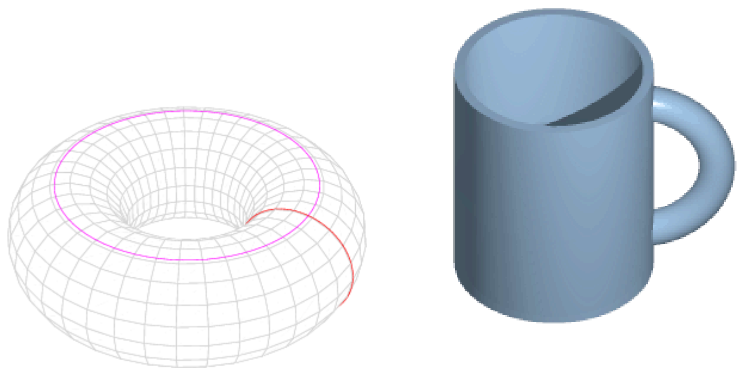
Diberikan G himpunan semua subhimpunan T $\ni$ $T \subseteq R^n$.
Maka,
X homeomorfik pada Y adalah relasi ekivalen pada G
Jika X ekivalen Y, maka X dan Y disebut mempunyai tipe homeomorfisme (atau disebut X dan Y ekivalen secara topologis atau mempunyai sifat topologis yg identik) yang sama

Ketiga bangun pada Gambar 1 adalah identik (sama) secara topologis
Lingkaran homeomorfik pada elips, homeorfik pada kubus
Pita terhubung dan Pita Mobius pada Gambar 2 adalah identik (sama) secara topologis
Pita (1) homeomorfik pada pita Mobius (2)

Bayangkan kubus dan bola !

Bayangkan pula, donat dan cangkir (Gambar 3) !

Tapi, lingkaran tidak homemorfik pada donat !



Gambar 3. Donat dan cangkir (mug)

Mengapa demikian ?

Untuk mengetahui dan memahami lebih lanjut, pelajari buku atau literatur Pengantar Topologi, Topologi elementar.

Materi pokok dalam literatur Pengantar topologi, Topologi elementer.

Pengertian dasar (Konsep Euclidean)

Garis Real ?

- Titik, jarak 2 titik
- Interval
- Tetangga (*neigbourhood*) suatu titik

Bidang ?

- Titik, jarak 2 titik
- Garis
- Tetangga suatu titik
- Lingkaran dan cakram, keliling lingkaran
- Segitiga dan segitiga lubang, dan keliling segiiga
- Bujur sangkar dan segipanjang
- Bidang keseluruhan
- Setengah bidang
- Himpunan hampa
- Kurva sembarang

Ruang ?

- Titik, jarak 2 titik
- Tetangga suatu titik
- Garis
- Bidang (datar)
- Setengah bidang
- Bola
- Kubus

….

- Kurva sembarang

R^2, ruang real dimensi 2

- Himp titik-titik atau pasangan pasangan berturut dari bilangan real
- Ruang Euclidean dimensi 2:
- Sistem kordinat tegak lurus : sumbu X dan sumbu Y
- Bidang datar ?, titik?, garis, …. dst

R^n , ruang real dimensi n,

- Himpunan aemua n-tuples dari bilangan real, yg dilengkapi dengan pengertian jarak : unt 2 titik anggota R^n, sebut p = $(x_1, \ldots x_n)$ dan q = $(y_1, \ldots, y_n)$, jarak 2 titik tersebut

$$D(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Sifat :

untuk semua p, q $\in$ R^n,

(i) $d(p,q) \geq 0$ (sifat definit positif)

$d(p,q) = 0$ jik-ka $p = q$

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$ (sifat simetri)

(iii) untuk semua p, q., r $\in$ R^n,

$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (sifat pertaksamaan segitiga)

Konsep lain :

- Subhimpunan buka dan tutup dalam R^n
- cakram tertutup / terbuka , bola tertutup/terbuka
- tetangga titik p, himpunan titik-titik yg 'dekat' dengan p (p pusat cakram, bola)
- Konsep kedekatan
- Subhimpunan buka, subhimpunan tutup dari himpunan
- Topologi dari subhimpunan sembarang $X \subseteq R^n$. Semua himpunan dari semua subhimpunan buka dari X disebut topologi dari X
- Sifat-sifat subhimpunan buka , subhimpunan tutup
- Kepadatan (*dense*)

$A \subseteq X \subseteq R^n$; A padat di dalam X jika setiap subhimp buka di dlm X mengandung suatu titik di dalam A

Contoh:

Q : bil rasional, Z : bil irasional. Maka Q dan Z adalah padat dlm R^1

- Titik limit
- Titik terisolasi

Dari konsep-konsep dalam ruang Euclidean di atas, dibuat konsep lebih umum yang menjadi dasar Topologi Umum

- Topologi
- Ruang topologi
- *Derived topology, induccd topology*
- Ruang Hausdorff
- Metrik dan ruang metrik
- Topologi yg dibangkitkan dari suatu metrik
- Transformasi affin
- Hilbert cube
- Kontinuitas fungsi
- Konstruksi dari fungsi-fungsi kontinu
- Grafik fungsi
- Kontinuitas fungsi dalam ruang topologi
- Homeomorfisme

- Ekivalen secara topologis
- Interval dan homeomorfisme
- Sifat-sifat topologis

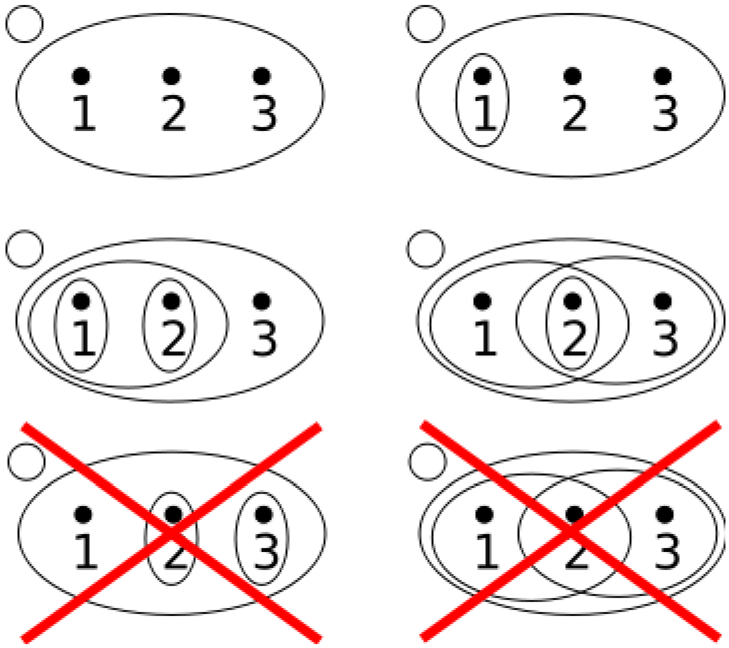
Konsep lanjut:

- Himpunan Cantor
- Embeddings
- Connectivity
- Path Connectedness
- Boundary dan interior dari suatu subhimpunan
- Dimensi
- Kekompakan (*compactness*)
- Jarak 2 subhimpunan
- Topologi kompak-buka
- Keterhubungan lokal (*local connectivity*)

Topik Lanjut
- Space-Filling Curves
- Manifolds
- Knots dan Knootings
- Simple Connectivity
    - Homotopi
    - Retraction dan deformation
- Deformation Type
    - Deformation retract
- Complexes
    - Simplicial complexes
    - k-simplex
    - topological graph
- Higher dimension
- Poincare conjecture

Silahkan baca buku-buku Dasar-Dasar Topologi ataupun Topologi Elementer Misal, Elementary Topology oleh Dennis Roseman, Prentice-Hall, 1999

Contoh Topologi diskret



1.S = {1, 2, 3}, T = {$\varnothing$, {1, 2, 3}}, $T_1 = \varnothing$, T_2 = {1, 2, 3}, A = {1, 2}

(i) $T_1 \cup T_2$ = {1, 2, 3} $\in$ T
(ii) $T_1 \cap T_2 = \varnothing \in$ T
(iii) $\varnothing \in$ T, S $\in$ T

2. S = {1, 2, 3}, T = {$\varnothing$, {1}, {1, 2, 3}}, $T_1 = \varnothing$, T_2 = {1}, T_3 = {1, 2, 3}, A = {1, 2, 3}

(i) $T_1 \cup T_2$ = {1} $\in$ T, $T_2 \cup T_3$ = {1, 2, 3} $\in$ T, $T_1 \cup T_3$ = {1,2, 3} $\in$ T, $T_1 \cup T_2 \cup T_2$ = {1, 2, 3}$\in$ T
(ii) $T_1 \cap T_2 = \varnothing \in$ T, $T_2 \cap T_3$ = {1} $\in$ T, …. $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \varnothing \in$ T
(iii) $\varnothing \in$ T, S $\in$ T

3. S = {1, 2, 3}, T = {$\varnothing$, {1, 2}, {1, 2, 3}}. Coba periksa !

4. S = 1, 2, 3}, T = {$\varnothing$, {1, 2}, {2}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

tetapi

5. S = {1, 2, 3}, T = {$\varnothing$, {2}, {3}, {1, 2, 3}}, …….. T <u>bukan</u> topologi thd S, karena

(i) $T_2 \cup T_3 = \{2, 3\} \notin T$

6. $S = \{1, 2, 3\}$, $T = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, …. T <u>bukan</u> topologi, karena
(ii) $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin T$

Bagaimana dengan ?

$S = \{ x \mid x \in R, 1 < x < 3\}$, $T = \{\varnothing, S\}$?

$S = \{ x \mid x \in R, 1 < x < 3\}$, $T = \{\varnothing, \{1\}, S\}$?

$S = \{ x \mid x \in R, 1 < x < 3\}$, $T = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{x \mid x \in R, 1<x< 2\}, S\}$?
$\{x \mid x \in R, 1<x< 2\} \cap S = \{x \mid x \in R, 1<x< 2\} \in T$

$S = \{ x \mid x \in R, 1 < x < 3\}$, $T = \{\varnothing, S, (1\ 2), (2\ \ 3), S\}$

$(1\ 2) \cap (2\ \ 3) = \varnothing \in T$

$(1\ 2) \cup (2\ \ 3)$? dlm T ?

beda dgn $[1\ 2] \cap [2\ \ 3] = \{2\} \notin T$

→ jika T topologi, maka semua himpunan dlm T adalah himpunan buka.