1. Fungsi Gamma, Beta dan Error

Content:

Fundamental properties of Gamma functions, the value of (1/2) and graph of the Gamma function, Transformation of Gamma function, Different forms of Beta function, Reduction of definite integrals to Gamma functions, Error function or probability integral

Penggunaan Fungsi Gamma/$\Gamma(z)$

- Normalisasi fungsi gelombang dari potensial Coulomb
- Perhitungan probabilitas pada problem di Mekanika Statistik

- Secara umum fungsi Gamma lebih jarang digunakan dibandingkan dengan fungsi khusus seperti Legendre atau Bessel.

Definisi fungsi Gamma

Cukup banyak definisi fungsi Gamma, dua diantaranya:

(1) $$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{1.1}$$

(2) $$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)} \tag{1.2}$$

Dapat dibuktikan bahwa definisi 1 = definisi 2

(Bukti lengkap ada pada Arfken page 592-593)

Dapat dibuktikan $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
untuk kedua definisi.

Bukti untuk definisi 1:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Maka:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt = -\int_0^\infty t^{z} de^{-t}$$

$$= -t^{z} e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

Bukti untuk definisi 2:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)}$$

(selanjutnya latihan ☺)

Evaluasi beberapa nilai fungsi Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$ <<definisi 1>>

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t^{2-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t e^{-t} dt = \int_0^\infty -t de^{-t} = -te^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty t^{3-1} e^{-t} dt = ... = 2$$

$$\Gamma(4) = \int_0^\infty t^{4-1} e^{-t} dt = ... = 3.2 = 6$$

$$\Gamma(5) = \int_0^\infty t^{5-1} e^{-t} dt = ... = 4.3.2 = 24$$

Kalau n bilangan bulat positif, dapat dilihat:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Oleh karena itu fungsi Gamma sering disebut sebagai fungsi faktorial.

Dapat dibuktikan hal yang sama pada definisi 2:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z\,(z+1)\cdots(z+n)}$$

$\Gamma(1)$ = …

$\Gamma(2)$ = ….

$\Gamma(3)$ = ….

Sudah tentu hasilnya sama dengan definisi 1

Bagaimana kalau pecahan?

$$\Gamma(1/2) = ?$$

- Γ(1/2) sering dijumpai dalam problem Mekanika statistik.

- $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

- Integral ini dapat diselesaikan dengan contour integral (variabel kompleks) dan berharga $\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Latihan:

- Gunakan $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ dan sifat $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ untuk evaluasi fungsi Gamma 3/2, 5/2, 7/2,-1/2,-3/2 dsb

Beberapa nilai fungsi gamma

$$\Gamma(-3/2) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} \approx 2.363$$

$$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.545$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \approx 1.772$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

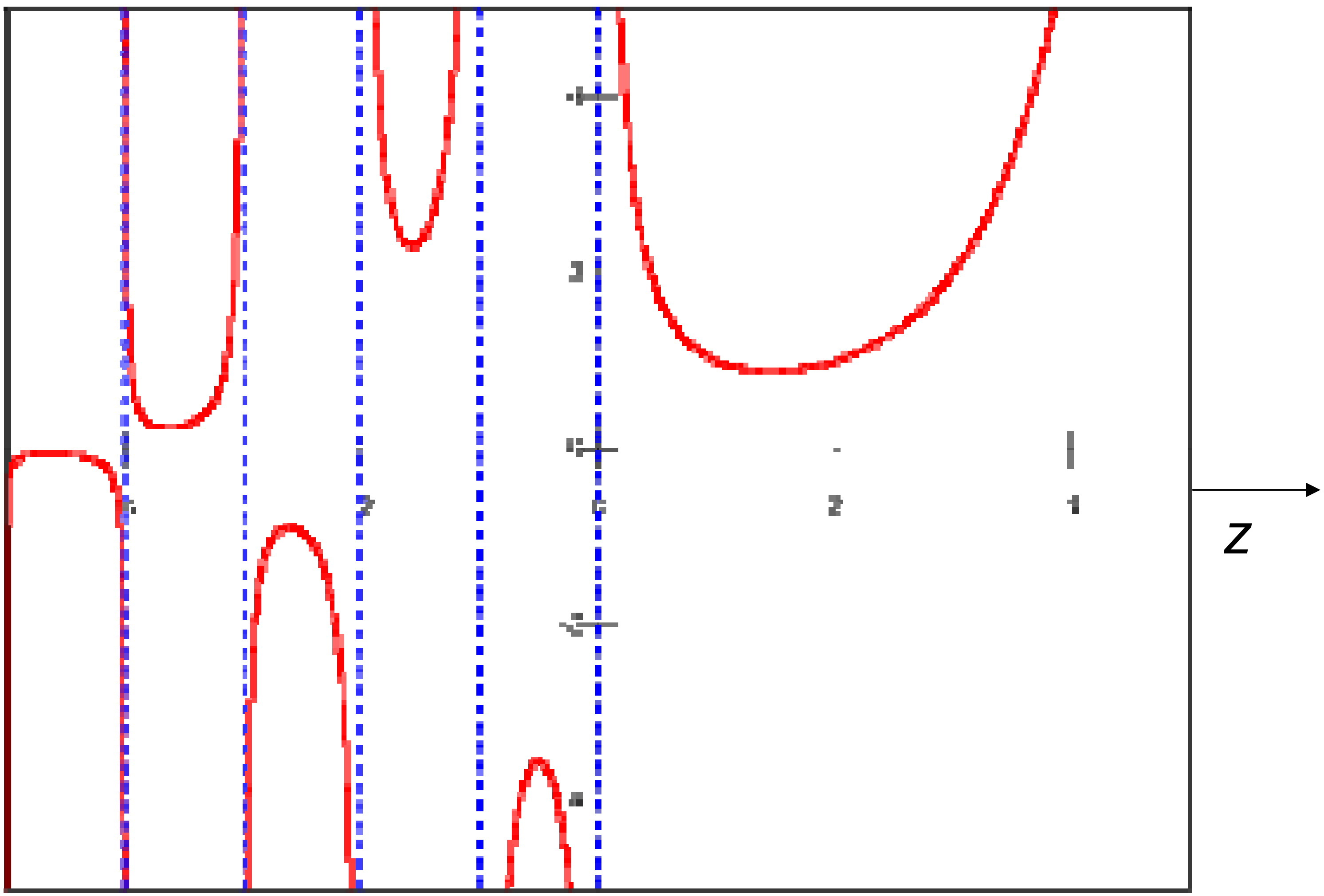
$$\Gamma(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.329$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(7/2) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \approx 3.323$$

$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

Grafik fungsi gamma



Sifat-sifat fungsi gamma

- $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

- $$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Bentuk lain ekspresi fungsi Gamma (Buktikan!)

$$\Gamma(z) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt$$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln(\frac{1}{t}) \right]^{z-1} dt$$

Soal-soal Latihan

1. Hitung kecepatan rms partikel gas yang memenuhi distribusi Maxwell:

$$\frac{dN}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv$$

Catatan:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\int v^2 dN}$$

2. Perluasan soal no. 1, buktikan: $$\left\langle v^n \right\rangle = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})}$$

(faizal)

3. Dari relasi $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$

Tunjukkan bahwa $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

4. Buktikan: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^4}\,dx = \left(\tfrac{1}{4}\right)!$

5. Dengan transformasi ke fungsi gamma, buktikan:

$$-\int_0^1 x^k \ln x\,dx = \frac{1}{(k+1)^2} \qquad k > -1$$

Law

Fungsi Beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

Sifat-sifat fungsi Beta:

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x).$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta, \qquad \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt, \qquad \Re(x) > 0,\ \Re(y) > 0$$

Fungsi Error ← Fungsi Gamma Tak Lengkap

$$\Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$$

Sering juga dibedakan:

Fungsi Gamma Tak Lengkap Batas Atas:

$$\Gamma(a,x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$$

Fungsi Gamma Tak Lengkap Batas Bawah:

$$\gamma(a,x) = \int_0^{x} e^{-t} t^{a-1} dt$$

Sifat-sifat

Dengan integrasi per-bagian, didapat:

$$\Gamma(a+1,x) = a\Gamma(a,x) + x^a e^{-x}$$

$$\gamma(a+1,x) = a\gamma(a,x) - x^a e^{-x}.$$

Dari definisi Fungsi Gamma biasa, didapat:

$$\gamma(a,x) + \Gamma(a,x) = \Gamma(a).$$

ke Bab 2