2. Fungsi Bessel

2.1. Persamaan Diferensial Bessel
2.2. Sifat-sifat Fungsi Bessel
2.3. Fungsi-fungsi Hankel, Bessel Orde-fraksional, Bessel Sferis

Penggunaan Fungsi Bessel

- Mencari solusi separasi variabel dari persamaan Laplace dan Helmholtz dalam koordinat silinder dan sferis
- Khususnya penting dalam berbagai problem seperti propagasi gelombang, potensial statik dan sebagainya.

- Contoh dalam koordinat Silinder:

  - Electromagnetic waves in a cylindrical waveguide

  - Heat conduction in a cylindrical object.

  - Modes of vibration of a thin circular (or annular) artificial membrane.

  - Diffusion problems on a lattice.

- Useful properties for other problems, such as signal processing (e.g., see FM synthesis, Kaiser window, or Bessel filter).

Persamaan Diferensial Bessel

- Fungsi Bessel, pertama kali didefinisikan oleh seorang ahli Matematik Daniel Bernoulli dan diperluas oleh Friedrich Bessel, merupakan solusi persamaan diferensial:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \qquad (2.1)$$

untuk α real atau kompleks. Kasus paling umum apabila α adalah bilangan bulat *n*.

Fungsi generator

Lihat fungsi dengan 2 variabel:

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} \qquad (2.2)$$

Ekspansikan berdasarkan deret Laurent akan didapat:

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(x) t^n \qquad (2.3)$$

$J_n(x)$ yang merupakan koefisien t^n adalah fungsi Bessel jenis pertama dari orde bilangan bulat n.

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(x) t^n$$

$$e^{(x/2)(t-1/t)} = e^{xt/2} e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

Untuk suatu *s* tertentu, kita dapatkan t^n ($n \geq 0$) dari:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

Sehingga koefisien t^n menjadi:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \qquad (2.4)$$

Kalau $n < 0$:

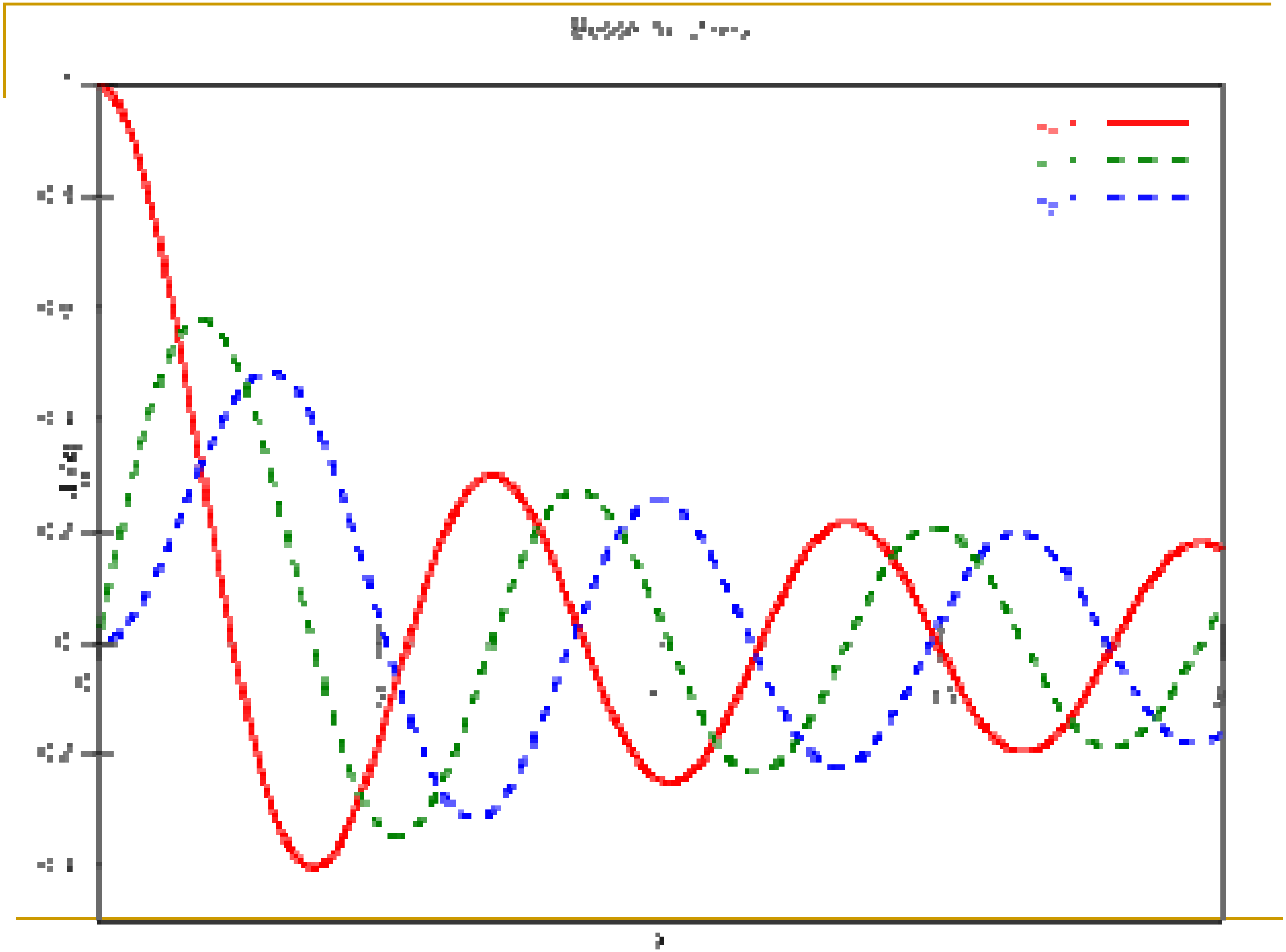
$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(-n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}$$

Karena $(s-n)! \rightarrow \infty$ kalau $s=0,1,2,\ldots(n-1)$; maka:

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

Sehingga dapat disimpulkan:

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ untuk n bilangan bulat (2.5)



Kembali ke fungsi generator:

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(x) t^n$$

Bila kita diferensialkan secara parsial terhadap *t*, maka:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = \frac{1}{2} x\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{(x/2)(t-1/t)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

Digabung akan diperoleh (misal untuk koefisien t^{n-1}):

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \qquad (2.6)$$

Persamaan $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ disebut dengan persamaan rekursi.

Disini apabila J_0 dan J_1 diketahui maka J_2 dapat dicari, dan seterusnya.

Hal ini sangat bermanfaat, khususnya kalau kita menggunakan komputer digital.

Kalau fungsi generator kita diferensialkan terhadap *x*, kita dapatkan:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J'_n(x)t^n$$

Kita dapatkan hubungan rekursi:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \qquad (2.7)$$

Kasus spesial untuk hal ini:

$$J'_0(x) = - J_1(x)$$

Gabungan pers. (2.6) dan (2.7) menghasilkan:

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x) \qquad (2.8)$$

Kalikan dengan x^n dan disusun kembali menghasilkan (buktikan!) :

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \qquad (2.9)$$

Kurangi pers. (2.7) dengan (2.6) bagi 2 menghasilkan:

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x) \qquad (2.10)$$

Lalu buktikan: $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x)$ (2.11)

Persamaan (2.6) s.d. (2.11) merupakan hubungan rekursi fungsi Bessel.

Selanjutnya kita akan kembali bahas persamaan differensial Bessel.

Hubungan rekursi (2.8) dapat ditulis kembali, dengan *n* tidak harus bilangan bulat, sebut saja ν, fungsi menjadi Z_ν.

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x) \qquad (2.12)$$

Dst. (lihat Arfken), maka akan diperoleh persamaan diferensial orde-2 yang merupakan persamaan Bessel:

$$x^2 Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0 \qquad (2.13)$$

Representasi Integral

Kita lihat kembali fungsi generator:

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(x)t^n$$

Substitusikan $t = e^{i\theta}$, akan diperoleh:

$$e^{ix\sin\theta} = J_0(x) + 2[J_2(x)\cos 2\theta + J_4(x)\cos 4\theta + \ldots..]$$

$$+ 2i[J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \ldots..]$$

Dalam notasi sumasi dapat ditulis:

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta) \qquad (2.14)$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin[(2n-1)\theta] \qquad (2.15)$$

Gunakan sifat ortogonalitas sin & cos, didapat:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\ d\theta = \begin{cases} J_n(x) & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 0 & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\theta)\sin n\theta\ d\theta = \begin{cases} 0 & \text{untuk } n \text{ genap} \\ J_n(x) & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Kombinasikan, akan diperoleh:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta] d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta) d\theta, \quad n = 0,1,2,3,4... \qquad (2.16)$$

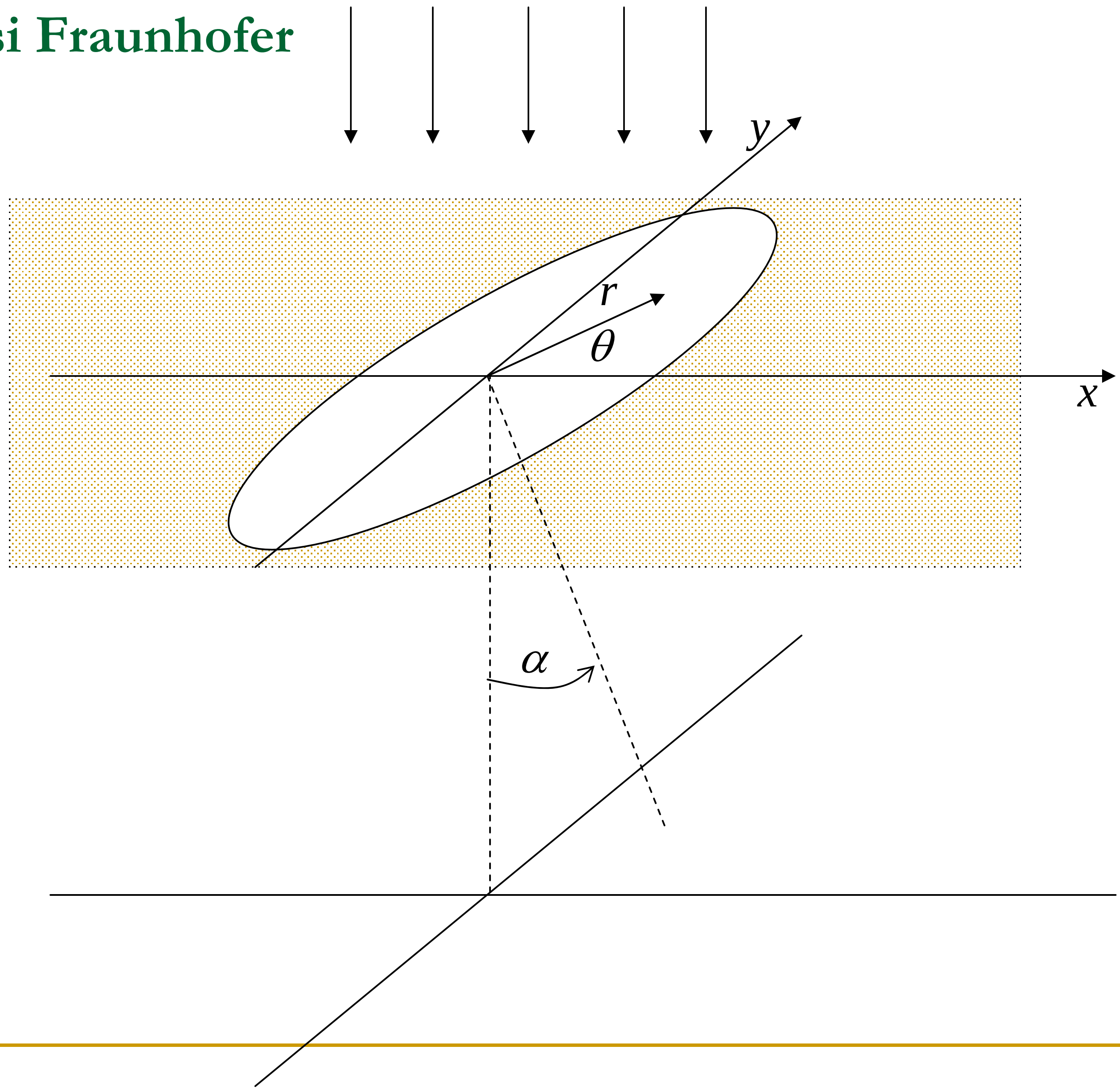
Kasus spesial:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta) d\theta \qquad (2.17)$$

Contoh penggunaan di Fisika

- Difraksi Fraunhofer
- Tabung resonansi silindris

Difraksi Fraunhofer



Dalam teori difraksi melalui lubang lingkaran kita dapatkan integral:

$$\Phi \propto \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ibr\sin\theta} r dr d\theta$$

disini:

Φ: amplitudo gelombang terdifraksi

θ: sudut azimuth

a: radius lubang

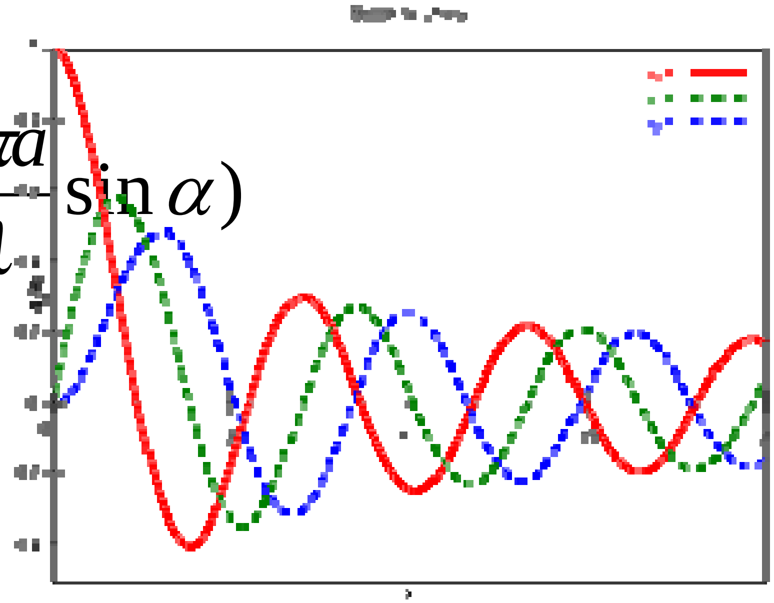
$$b = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha$$

Sesuai dengan representasi integral, maka dapat ditulis:

$$\Phi \propto 2\pi \int_0^a J_0(br) r dr$$

Gunakan (2.11), diperoleh:

$$\Phi \propto \frac{2\pi}{b^2} J_1(ab) \propto \frac{\lambda a}{\sin\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha\right)$$



Intensitas difraksi:

$$\Phi^2 \propto \left[\frac{\lambda a}{\sin\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha\right)\right]^2$$

Titik nol pertama $J_1(x)$ terjadi pada x=3,8317, sehingga gelap pertama pola difraksi pada:

$$\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha = 3{,}8317$$

Soal latihan

1. Tunjukkan bahwa:

$$a).\cos(x) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)$$

$$b).\sin(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n-1}(x)$$

2. Buktikan bahwa:

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta \; d\theta$$

3. Tunjukkan bahwa:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

4. Turunkan persamaan ini:

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n J_0(x)$$

(petunjuk: gunakan induksi matematik)

- Pelajari sendiri tentang ortogonalitas fungsi Bessel (Arfken p.645-648)

Sekedar pengingat tentang fungsi ortogonal

It is common to use the following inner product for two functions f and g:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx.$$

Here we introduce a nonnegative weight function *w*(*x*) in the definition of this inner product.
We say that those functions are **orthogonal** if that inner product is zero:

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx = 0.$$

We write the norms with respect to this inner product and the weight function as

$$||f||_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w}$$

The members of a sequence { f_i : i = 1, 2, 3, ... } are:

- *orthogonal* if

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f_j(x) w(x)\, dx = ||f_i||^2 \delta_{i,j} = ||f_j||^2 \delta_{i,j}$$

- *orthonormal*

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f_j(x) w(x)\, dx = \delta_{i,j}$$

where $\delta_{i,j} = \begin{Bmatrix} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{Bmatrix}$

is the Kronecker delta. In other words, any two of them are orthogonal, and the norm of each is 1 in the case of the orthonormal sequence. See in particular orthogonal polynomials.

Contoh: (buktikan!)

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n} & , m \neq 0 \\ 0 & , m = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \; dx = \begin{cases} \pi\delta_{m,n} , & m \neq 0 \\ 2\pi & , m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \; dx = 0$$ untuk semua m dan n bulat

Fungsi Neumann,
Fungsi Bessel jenis kedua, $N_\nu(x)$

Dari teori persamaan diferensial, karena merupakan orde dua maka persamaan Bessel mempunyai dua solusi independen.

Untuk ν bukan bilangan bulat kita mempunyai dua solusi yakni $J_\nu(x)$ dan $J_{-\nu}(x)$ yang saling independen. Namun kalau ν bilangan bulat maka kedua solusi tersebut saling bergantung.

Solusi kedua dicoba sebagai berikut (kombinasi linear dari $J_\nu(x)$ dan $J_{-\nu}(x)$):

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi \; J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \qquad (2.18)$$

Ini yang disebut sebagai fungsi Neumann. Jelas tampak bahwa untuk ν bukan bilangan bulat, $N_\nu(x)$ memenuhi persamaan Bessel.

Bentuk integral Fungsi Neumann

Sama seperti semua fungsi Bessel, $N_\nu(x)$ juga mempunyai representasi integral. Sebagai contoh untuk $N_0(x)$ kita mempunyai:

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cosh t)\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos xt}{(t^2-1)^{1/2}}\,dt \qquad x > 0 \qquad (2.19)$$

Solusi umum persamaan Bessel

$$y(x) = AJ_{\nu}(x) + BN_{\nu}(x) \qquad (2.20)$$

Hubungan Rekursi

Hubungan rekursi gabungan fungsi Bessel dan fungsi Neumann sangat banyak, diantaranya dapat disebut:

$$J_\nu J_{-\nu+1} + J_{-\nu} J_{\nu-1} = \frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \qquad (2.21)$$

$$J_\nu J_{-\nu-1} + J_{-\nu} J_{\nu+1} = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \qquad (2.22)$$

$$J_\nu N'_\nu - J_{-\nu} N_\nu = \frac{2}{\pi x} \qquad (2.23)$$

$$J_\nu N_{\nu+1} - J_{\nu+1} N_\nu = -\frac{2}{\pi x} \qquad (2.24)$$

Aplikasi Fungsi Neumann

- Coaxial Wave Guide (Arfken p.655-656)

Fungsi Hankel

Definisi-definisi:

Fungsi Hankel jenis 1:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\,N_\nu(x) \qquad (2.25)$$

Fungsi Hankel jenis 2:

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\,N_\nu(x) \qquad (2.26)$$

Hal ini analog:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \sin\theta$$

Karena fungsi Hankel merupakan kombinasi linear J_ν dan N_ν maka memenuhi rekursi yang sama seperti:

$$H_{\nu-1}(x) + H_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} H_\nu(x) \qquad (2.27)$$

$$H_{\nu-1}(x) - H_{\nu+1}(x) = 2H'_\nu(x) \qquad (2.28)$$

Keduanya berlaku untuk $H_\nu^{(1)}(x)$ dan $H_\nu^{(2)}(x)$

Beberapa formula Wronskian dapat dikembangkan:

$$H_\nu^{(2)} H_{\nu+1}^{(1)} - H_\nu^{(1)} H_{\nu+1}^{(2)} = \frac{4}{i\pi x} \qquad (2.29)$$

$$J_{\nu-1} H_\nu^{(1)} - J_\nu H_{\nu-1}^{(1)} = \frac{2}{i\pi x} \qquad (2.30)$$

$$J_\nu H_{\nu-1}^{(2)} - J_{\nu-1} H_\nu^{(2)} = \frac{2}{i\pi x} \qquad (2.31)$$

- Pelajari sendiri Modified Bessel Function yang juga ditemui di berbagai kasus Fisika

Fungsi Bessel Sferis

Ketika persamaan Helmholtz pada koordinat sferis dipisahkan, persamaan radial mempunyai bentuk:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + [k^2r^2 - n(n+1)]R = 0 \qquad (2.32)$$

Jelas persamaan ini bukan merupakan pers. Bessel, namun kalau kita substitusi:

(2.31)

$$R(kr) = \frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}$$

Persamaan menjadi:

$$r^2 \frac{d^2Z}{dr^2} + r\frac{dZ}{dr} + [k^2r^2 - (n+\tfrac{1}{2})^2]Z = 0 \qquad (2.34)$$

Tampak bahwa *Z* merupakan fungsi Bessel orde *n* + ½. Fungsi semacam ini dilabelkan sebagai fungsi Bessel sferis dengan definisi:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad (2.35)$$

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad (2.36)$$

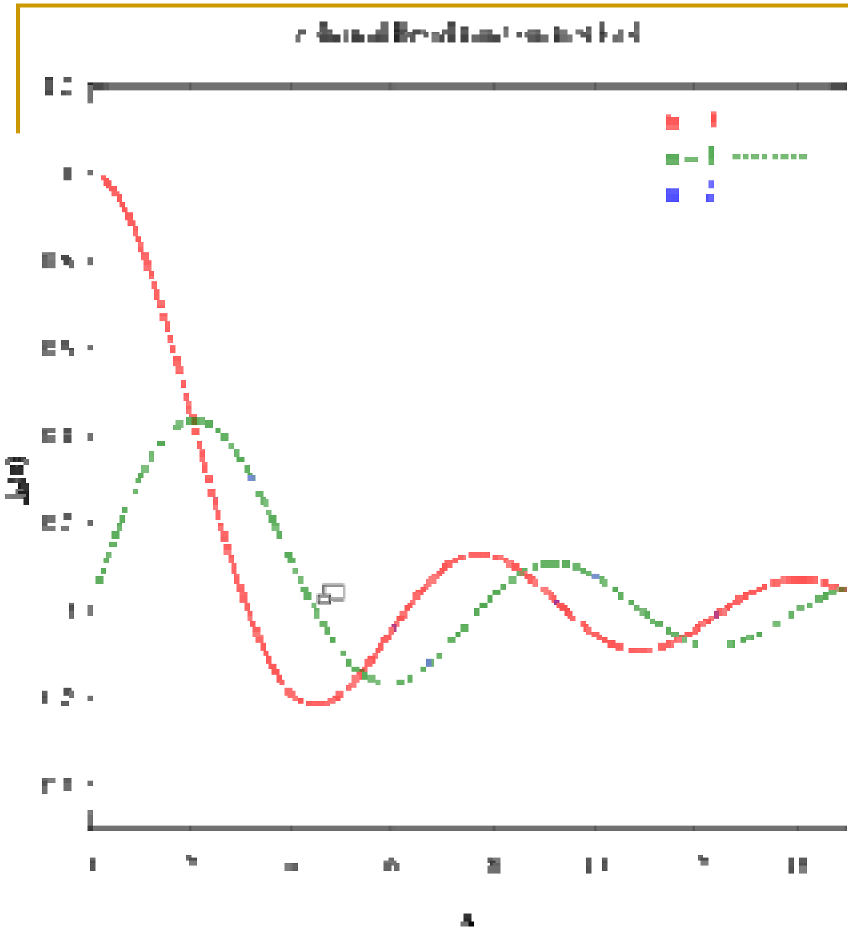
$$h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x) \qquad (2.37)$$

$$h_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) = j_n(x) - i n_n(x) \qquad (2.38)$$

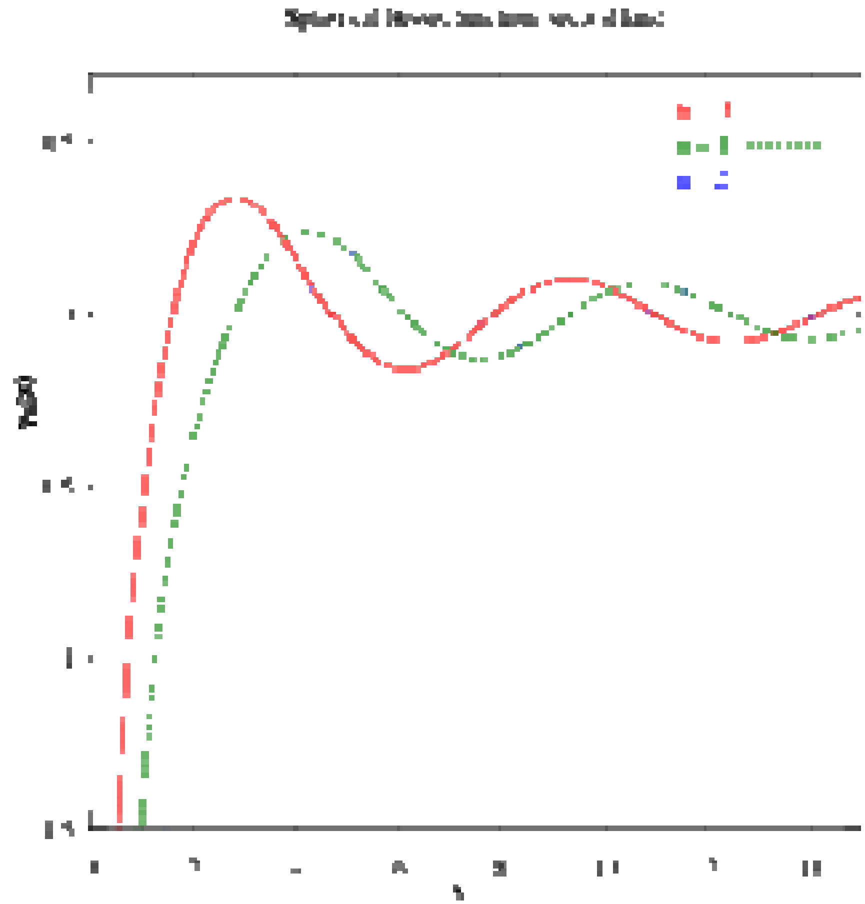
Dalam bentuk deret dapat dibuktikan:

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+n)!}{s!(2s+2n+1)!} x^{2s} \qquad (2.39)$$

$$n_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s-n)!}{s!(2s-2n)!} x^{2s} \qquad (2.40)$$



Spherical Bessel functions of 1st kind, $j_n(x)$, for n=0,1,2



Spherical Bessel functions of 2nd kind, $n_n(x)$, for n=0,1,2

Kasus khusus untuk n=0

$$j_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} x^{2s} = \frac{\sin x}{x} \tag{2.41}$$

Juga untuk n_0 (buktikan!):

$$n_0 = -\frac{\cos x}{x} \tag{2.42}$$

Dengan demikian fungsi Hankel sferis menjadi:

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{1}{x}(\sin x - i\cos x) = -\frac{i}{x}e^{ix} \tag{2.43}$$

$$h_0^{(2)}(x) = \frac{1}{x}(\sin x + i\cos x) = \frac{i}{x}e^{-ix} \tag{2.44}$$

Hubungan rekursi:

Dapat diturunkan dari deret atau dari hubungan rekursi fungsi Bessel yang sudah ada, diperoleh:

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x) \qquad (2.45)$$

$$nf_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f'_n(x) \qquad (2.46)$$

Dan juga: $$\frac{d}{dx}[x^{n+1} f_n(x)] = x^{n+1} f_{n-1}(x) \qquad (2.47)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} f_n(x)] = -x^{-n} f_{n+1}(x) \qquad (2.48)$$

Disini f_n dapat berupa j_n, n_n, $h_n^{(1)}$ dan $h_n^{(2)}$

Dari (2.48) secara cepat dapat ditunjukkan (buktikan!):

$$\begin{aligned} j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \\ j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} n_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \\ n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x \end{aligned} \tag{2.50}$$

dan seterusnya …

Dengan induksi matematik, dapat diperoleh formula Rayleigh:

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right) \qquad (2.51)$$

Serupa untuk fungsi Hankel:

$$h_n^{(1)}(x) = -i(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{e^{ix}}{x}\right)$$

$$h_n^{(2)}(x) = i(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{e^{-ix}}{x}\right) \qquad (2.52)$$

Pelajari sendiri masalah ortogonalitas untuk fungsi Bessel sferis.

➔Banyak bermanfaat dan digunakan pada normalisasi fungsi gelombang.

Contoh penerapan di Fisika: Partikel dalam bola

Di Mekanika Kuantum sering dibahas problem partikel dalam bola berjari-jari *r*. Untuk menjelaskan hal ini perlu fungsi gelombang ψ yang memenuhi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi$$

Dengan syarat batas ψ memenuhi kondisi:

(a). $\psi(r \leq a)$ bernilai tertentu

(b). $\psi(r > a) = 0$

Hal ini berkorespondensi dengan potensial

(a). $V = 0$ untuk $r \leq a$, dan

(b). $V = \infty$ untuk $r > a$

Bagian radial *R* fungsi tersebut:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0$$

Solusi *R* untuk *n*=0

$$R=Aj_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right)+Bn_0\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r\right)$$

Dapat dibuktikan, bahwa:

$$E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Latihan

1. Dari hubungan rekursi, tunjukkan fungsi Bessel sferis memenuhi persamaan diferensial:

$$x^2 f_n''(x) + 2 f_n'(x) + [x^2 - n(n+1)] f_n(x) = 0$$

2. Dari induksi Matematika Raleigh untuk fungsi Bessel dan Neumann sferis evaluasi $j_0(x)$, $j_1(x)$, $j_2(x)$,dan $j_3(x)$ serta $n_0(x)$, $n_1(x)$, $n_2(x)$,dan $n_3(x)$

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

[Ke Bab 3]