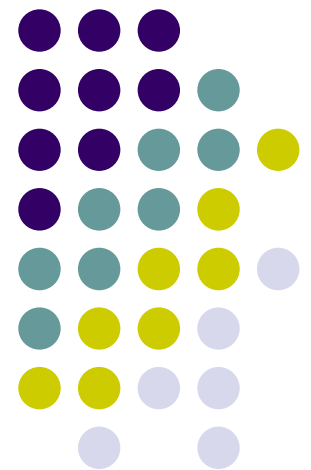


# 3. Fungsi Legendre

---

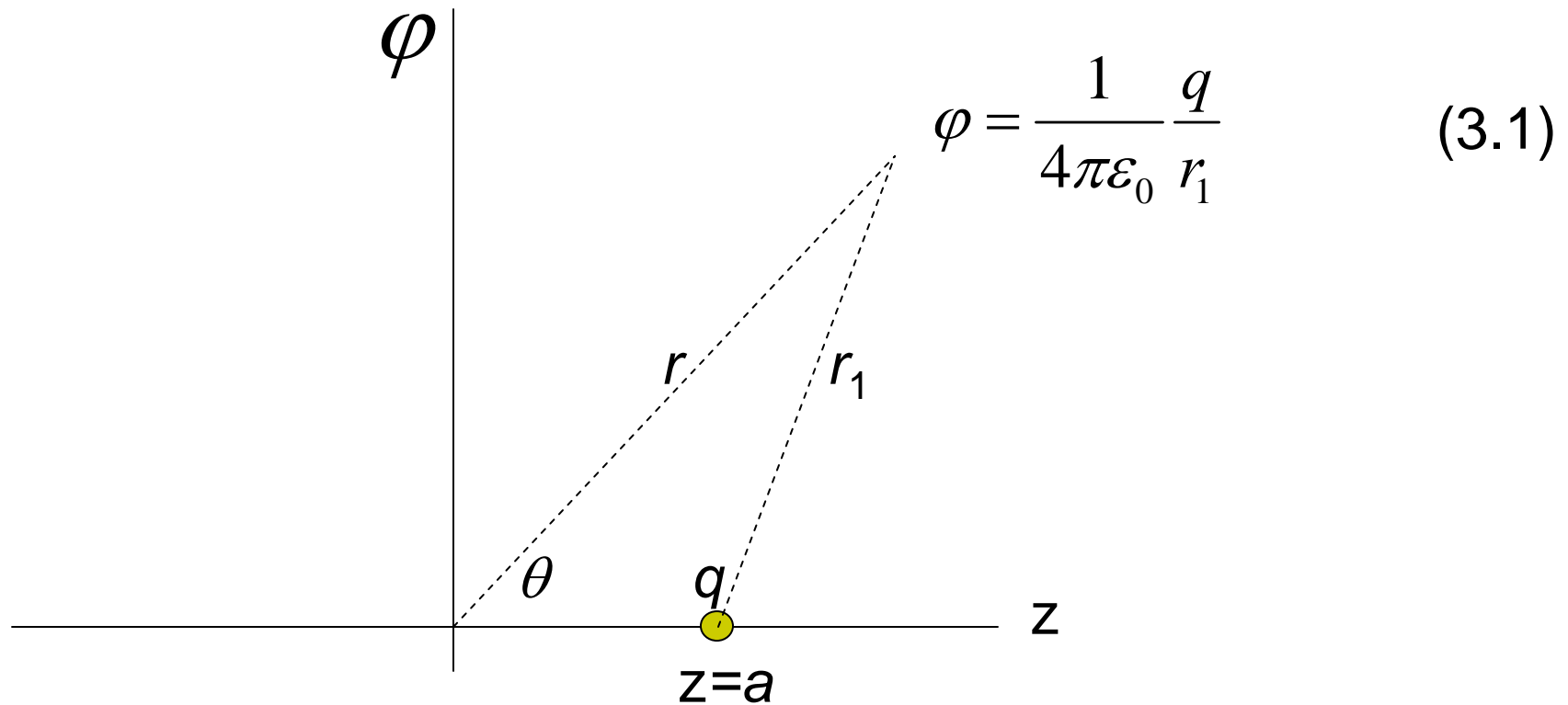
- 3.1. Pengembangan fungsi Legendre
- 3.2. Sifat-sifat Fungsi Legendre
- 3.3. Legendre Asosiasi
- 3.4. Harmonik Sferis
- 3.5. Operator Momentum Angular



# 3.1. Pengembangan Fungsi Legendre



Fungsi Legendre dapat langsung dikembangkan dari basis fisika yakni elektrostatis:





Dalam koordinat polar  $r$  dan  $\theta$ .

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{-1/2} \quad (3.2)$$

Dapat diekspansikan dalam polinomial  $P_n$ :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n \quad (3.3)$$

Disini  $P_n$  adalah polinomial Legendre dan dapat didefinisikan:

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, |t| < 1 \quad (3.4)$$

$g(t, x)$  merupakan fungsi generator untuk polinomial Legendre



Fungsi generator dapat diekspansikan:

$$\begin{aligned}(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (2xt - t^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (2xt - t^2)^n\end{aligned}\tag{3.4}$$

Ekspansi binomial dari  $(2xt - t^2)^n$  menghasilkan deret dobel:

$$\begin{aligned}(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{2^{2n} n! k!(n-k)!} (2x)^{n-k} t^{n+k}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Dapat diatur urutan sumasi:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^{2n-2k} k!(n-k)!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} t^n \quad (3.6)$$



Bandingkan dengan (3.4) diperoleh:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n - 2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (3.7)$$

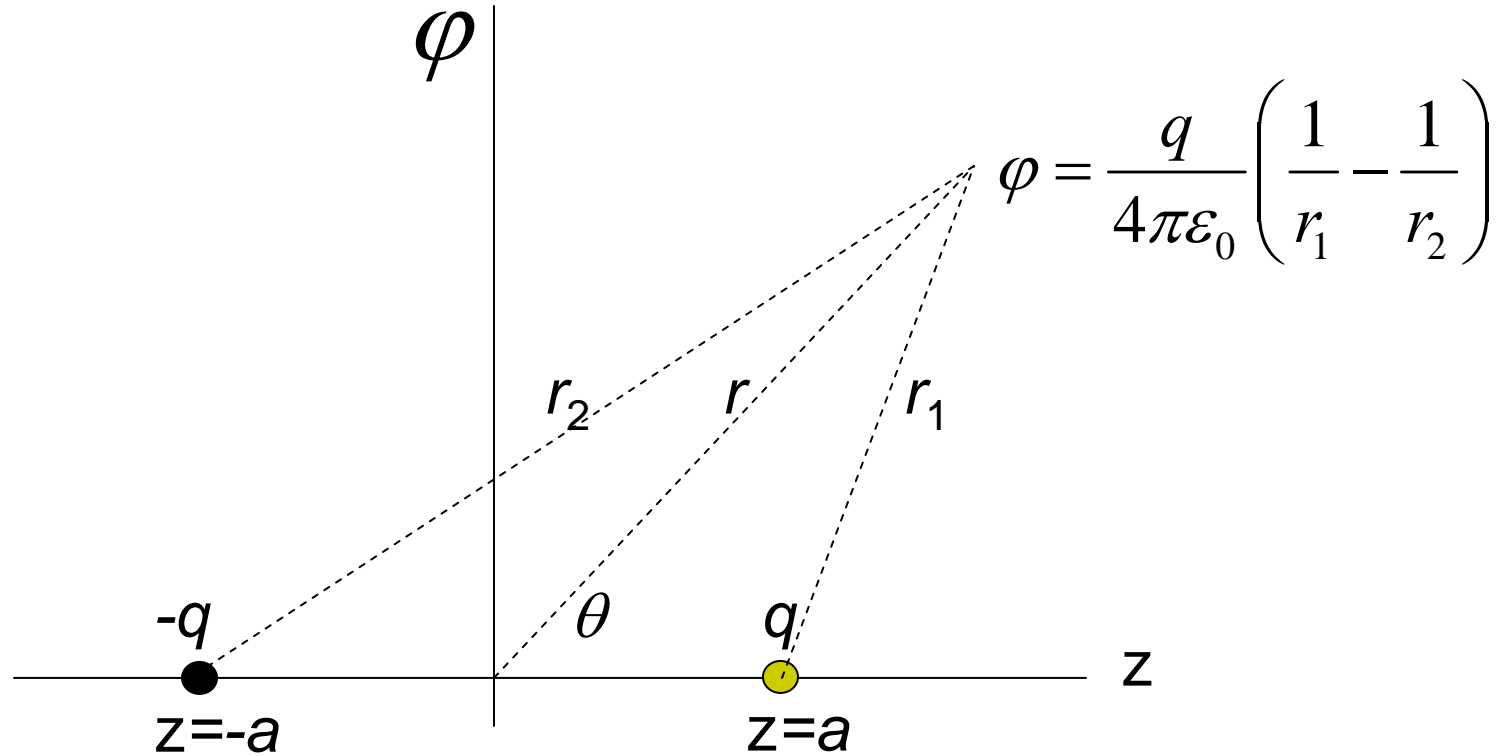
Dapat dievaluasi langsung beberapa  $P_n(x)$  untuk  $n$  kecil.

$$P_0(x) = 1 \qquad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_1(x) = x$$



Kembali ke masalah elektrostatis, untuk kasus dipole:



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.8)$$



Diekspansikan sesuai cosinus, untuk  $(r > a)$  :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ 1 - 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ 1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (3.9)$$

Jelas bahwa suku kedua serupa dengan pertama kecuali dengan mengganti  $a$  menjadi  $-a$ .

Gunakan (3.4) akan diperoleh:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) (-1)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \right] \quad (3.10)$$

$$\varphi = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[ P_1(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right) + P_3(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \dots \right] \quad (3.11)$$



Suku pertama (dan suku paling dominan kalau  $r \gg a$ ) adalah :

$$\varphi = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \quad (3.12)$$

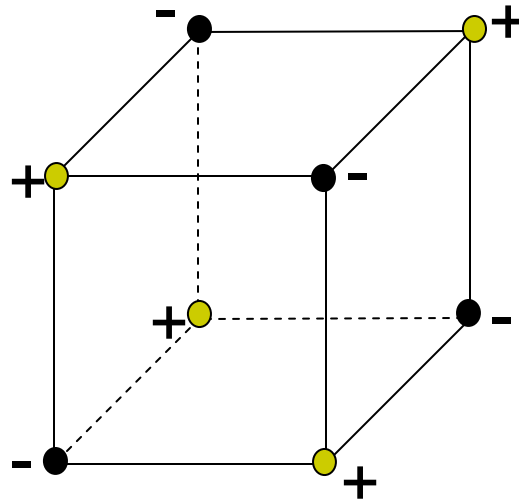
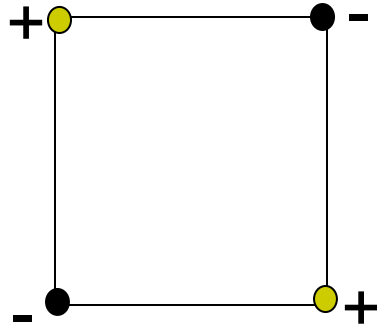
Yang merupakan potensial dipol listrik yang sudah biasa dikenal. Disini  $2aq$  merupakan momen dipol.





# Pelajari sendiri:

- Multipol listrik linear



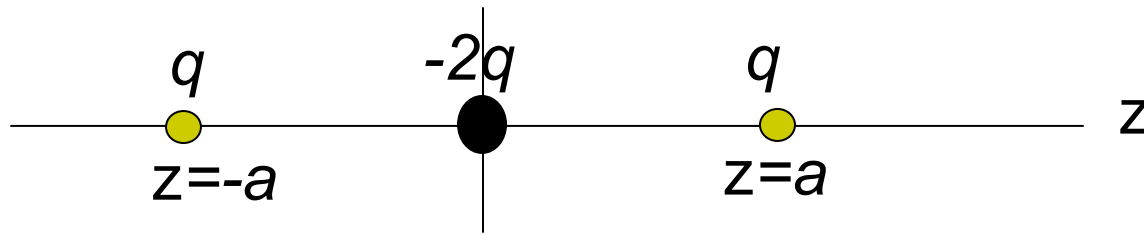
- Polinomial Gegenbauer

$$\frac{2^m}{(1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(m-\frac{1}{2})!} \sum_{n=0}^{\infty} T_n^m(x) t^n \quad (3.13)$$



# Latihan

- Kembangkan potensial listrik dari deretan muatan yang membentuk kuadropol:



- Gunakan  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  untuk mendapatkan komponen-komponen medan listrik sebuah dipole listrik. Anggap  $r \gg a$ .



## 3.2. Sifat-sifat Fungsi Legendre

### Hubungan Rekursi dan Sifat-sifat Khusus

Seperti pada fungsi Bessel, fungsi generator pada polinomial Legendre dapat dimanfaatkan untuk mengembangkan hubungan rekursi

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

Turunkan terhadap  $t$ :

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = \frac{x - t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

Dapat disusun menjadi:

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = 0 \quad (3.14)$$



Seterusnya (buktikan!):

$$(2n + 1)xP_n(x) = (n + 1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \quad (3.15)$$

Inilah hubungan rekursi tiga suku seperti pada fungsi Bessel.

Misal untuk  $n=1$ :

$$3xP_1(x) = 2P_2(x) + P_0(x)$$

Dari hal ini:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Nilai  $P_n(x)$  untuk orde  $n$  yang lebih tinggi secara iterasi.



## Polinomial Legendre

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

Secara manual teknik menghitung polinomial Legendre dapat membosankan. Namun dengan komputer digital hal ini dapat mudah dilakukan:

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x) - [xP_n(x) - P_{n-1}(x)]/(n+1) \quad (3.16)$$



# Persamaan Diferensial

Sifat-sifat lain polinomial Legendre dapat diperoleh dengan diferensiasi fungsi generator:

$$\frac{\partial g(t, x)}{\partial x} = \frac{t}{(1 - 2xt + t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n$$

atau

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x) t^n - t \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0 \quad (3.17)$$

dari hal ini:

$$P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) = 2xP'_n(x) + P_n(x) \quad (3.18)$$



Diferensiasikan (3.15) terhadap  $x$  kemudian kalikan dua dan gabung dengan persamaan (3.18), didapat:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x) \quad (3.19)$$

Gabungan (3.15) dan (3.19) menghasikan macam-macam relasi, diantaranya:

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x) \quad (3.20)$$

$$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x) \quad (3.21)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x) \quad (3.22)$$

$$(1-x^2)P'_n(x) = (n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x) \quad (3.23)$$



Diferensiasikan (3.22) dan gunakan (3.21) untuk menghilangkan  $P'_{n-1}(x)$  diperoleh p.d. orde-2:

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0 \quad (3.24)$$

Persamaan terakhir inilah yang disebut dengan persamaan diferensial Legendre.

Dalam banyak kasus di Fisika, pers. Legendre sering juga dinyatakan dalam diferensiasi terhadap  $\theta$ , dengan  $x = \cos \theta$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n + 1)P_n(\cos \theta) = 0 \quad (3.25)$$





Kembali ke fungsi generator:

$$g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Untuk  $x=1$ , dapat dievaluasi:

$$g(t, 1) = (1 - 2t + t^2)^{-1/2} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Dapat disimpulkan:

$$P_n(1) = 1 \tag{3.26}$$

Juga dapat dibuktikan dengan cara serupa:

$$P_n(-1) = (-1)^n \tag{3.27}$$



Bila  $x=0$ , maka dapat dievaluasi:

$$g(t,0) = (1+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)t^n$$

Sementara kita ketahui bahwa:

$$(1+t^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \dots + (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} t^{2n} + \dots$$

Maka:

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (3.28)$$
$$P_{2n+1}(0) = 0$$

# Paritas



Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa:

- $g(-t, -x) = g(t, x)$  (3.29)

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  (3.30)



# Latihan

- Lihat Arfken

1. Tunjukkan bahwa 
$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right] = -(n+1) \frac{P_{n+1}(\cos \theta)}{r^{n+2}}$$

Petunjuk dalam koordinat polar sferis: 
$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

2. Tunjukkan bahwa: 
$$\frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(x)t^n$$

Hasil ini bermanfaat untuk menghitung muatan terinduksi pada bola metal oleh suatu muatan titik  $q$ .



# Ortogonalitas Fungsi Legendre

Persamaan differensial Legendre (3.24):

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n + 1)P_n(x) = 0$$

dapat ditulis:

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] + n(n + 1)P_n(x) = 0 \quad (3.31)$$

Kalikan dengan  $P_m(x)$  kemudian integrasi dengan batas -1 sampai 1, didapat:

$$\int_{-1}^1 \left\{ P_m(x) \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_n(x)] - P_n(x) \frac{d}{dx}[(1 - x^2)P'_m(x)] \right\} dx =$$
$$= [m(m + 1) - n(n + 1)] \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx \quad (3.32)$$



Karena faktor  $(1-x^2)$  maka suku sebelah kiri =0, sehingga:

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

Untuk  $m \neq n$ , maka:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (3.33)$$

tampak ortogonalitas pada interval  $[-1, 1]$ .  
Masih harus dihitung untuk  $m=n$ , jelas integral tidak sama dengan nol.

Bagaimana mencarinya?



Dari fungsi generator:

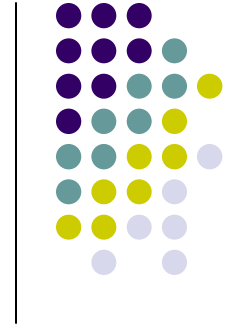
$$(1 - 2xt + t^2)^{-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \right)^2$$

Integrasikan dari  $x=-1$  sampai 1, maka suku bersilang akan menjadi nol, sehingga:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \quad (3.34)$$

Misalkan  $y = 1 - 2tx + t^2$ , didapat:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 - 2xt + t^2} = \frac{1}{2t} \int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t} \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) \quad (3.35)$$



Ekspansikan dalam deret pangkat:

$$\frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \quad (3.36)$$

Sehingga dapat disimpulkan (bandingkan 3.34 dan 3.36):

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (3.37)$$

Jadi:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}$$



# Definisi alternatif untuk polinomial Legendre



- Pelajari sendiri formula Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n \quad (3.38)$$

Latihan:

Cek untuk beberapa  $n$  kecil.



# Contoh-contoh penggunaan di Fisika

## 1. Medan Gravitasi Bumi

Salah satu penggunaan deret Legendre adalah untuk menjelaskan potensial gravitasi Bumi.

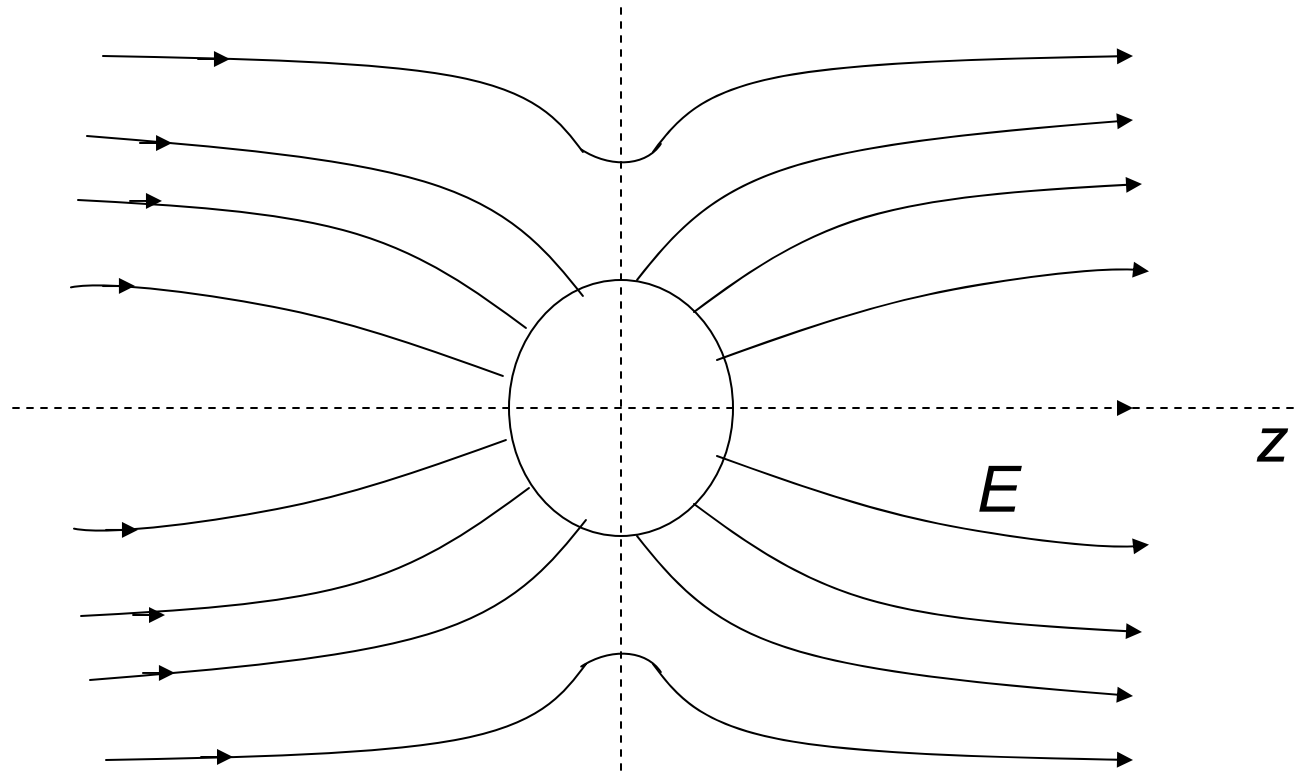
Dengan  $R = \text{radius equator} = 6378,1 \pm 0,1 \text{ km}$

$$\frac{GM}{R} = 62,494 \pm 0,001 \quad \text{km}^2 / \text{s}^2$$

Dapat ditulis:

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{R} \left( \frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \right)$$

## 2. Bola dalam Medan Uniform



Problem: mencari potensial yang terdistorsi karena ada bola konduktor dengan radius  $r_0$ .



Potensial elektrostatik memenuhi pers. Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Gunakan metode separasi variabel (lihat. Fisika Matematika II) pada koordinat polar sferis:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$$

(Mengapa tidak ada ketergantungan  $\varphi$ ?)

Bagaimana mencari koefisien  $a_n$  dan  $b_n$ ?

Gunakan syarat batas kondisi fisis.

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$$



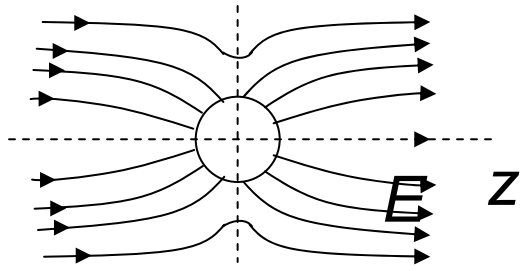
Bila medan original (tak terdistorsi) adalah  $E_0$  maka:

$$\begin{aligned} V(r \rightarrow \infty) &= -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \\ &= -E_0 r P_1(\cos \theta) \end{aligned}$$

Karena deret Legendre adalah unique maka dapat disimpulkan:

$$a_n = 0, \text{ untuk } n > 1$$

$$a_1 = -E_0$$



Kita dapat memilih pada bola konduktor dan bidang  $\theta = \pi/2$  potensial = 0, sehingga:

$$V(r = r_0) = a_0 + \frac{b_0}{r_0} + \left( \frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0 \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r_0^{n+1}} = 0$$

Supaya hal ini bisa terjadi maka semua koefisien  $P_n(\cos \theta)$  harus nol.

$$a_0 = b_0 = 0$$

$$b_n = 0 \text{ untuk } n \geq 2$$



Dan juga  $b_1 = E_0 r_0^3$

Potensial elektrostatik (di luar bola) menjadi:

$$\begin{aligned} V &= -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{E_0 r_0^3}{r^2} (\cos \theta) \\ &= -E_0 r P_1(\cos \theta) \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \end{aligned}$$

Pada teori Medan Elektromagnetik, hasil yang sama dapat dikerjakan dengan metode bayangan (detail lihat Jackson).



Sebagai informasi tambahan, kerapatan muatan permukaan terinduksi dapat dihitung:

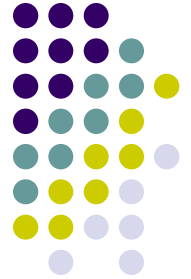
$$\sigma = -\varepsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

Momen dipole listrik terinduksi:

$$P = 4\pi r_0^3 \varepsilon_0 E_0$$



# Pelajari sendiri



## 3. Potensial Listrik Muatan Cincin



## 3.3. Fungsi Legendre Asosiasi

Fungsi Legendre Asosiasi dapat dikembangkan dari fungsi Legendre:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Diturunkan sebanyak  $m$  kali akan diperoleh:

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0 \quad (3.39)$$

Dengan:  $u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$

Sekarang kalau kita ambil:

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (3.40)$$



Masukkan ke (3.31) (latihan!!!) akan diperoleh:

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] v = 0 \quad (3.41)$$

Pers. (3.33) merupakan p.d. Legendre asosiasi yang akan kembali menjadi Legendre bila  $m=0$ .

Dalam koordinat polar, Legendre asosiasi menjadi:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] v = 0 \quad (3.42)$$



Solusi reguler, dilabelkan kembali  $P_n^m(x)$  adalah:

$$v(x) \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (3.43)$$

Beberapa fungsi Legendre asosiasi:

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin \theta$$

$$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2} = 3 \cos \theta \sin \theta$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3 \sin^2 \theta$$

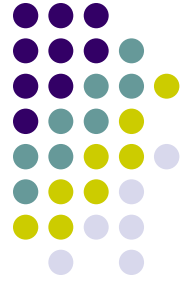
$$P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$$

$$P_3^2(x) = 15x(1-x^2) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2} = 15 \sin^3 \theta$$

$P_n^m(x)$  dan  $P_n^{-m}(x)$  dihubungkan dengan:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (3.44)$$



dan jelas bahwa:

$$P_n^0(x) = P_n(x) \quad (3.45)$$

Terdapat juga fungsi generator untuk Legendre Asosiasi, namun amat sangat jarang digunakan di Fisika.



## Hubungan Rekursi:

Karena ada dua indeks ( $n$  dan  $m$ ) maka ada macam-macam variasi hubungan rekursi. Beberapa diantaranya dapat dilihat di Arfken.

Misal:

$$(2n + 1)xP_n^m = (m + n)P_{n-1}^m + (m - n + 1)P_{n+1}^m \quad (3.46)$$



Paritas Fungsi Legendre Asosiasi:

$$P_n^m(-x) = (-1)^{m+n} P_n^m(x) \quad (3.47)$$

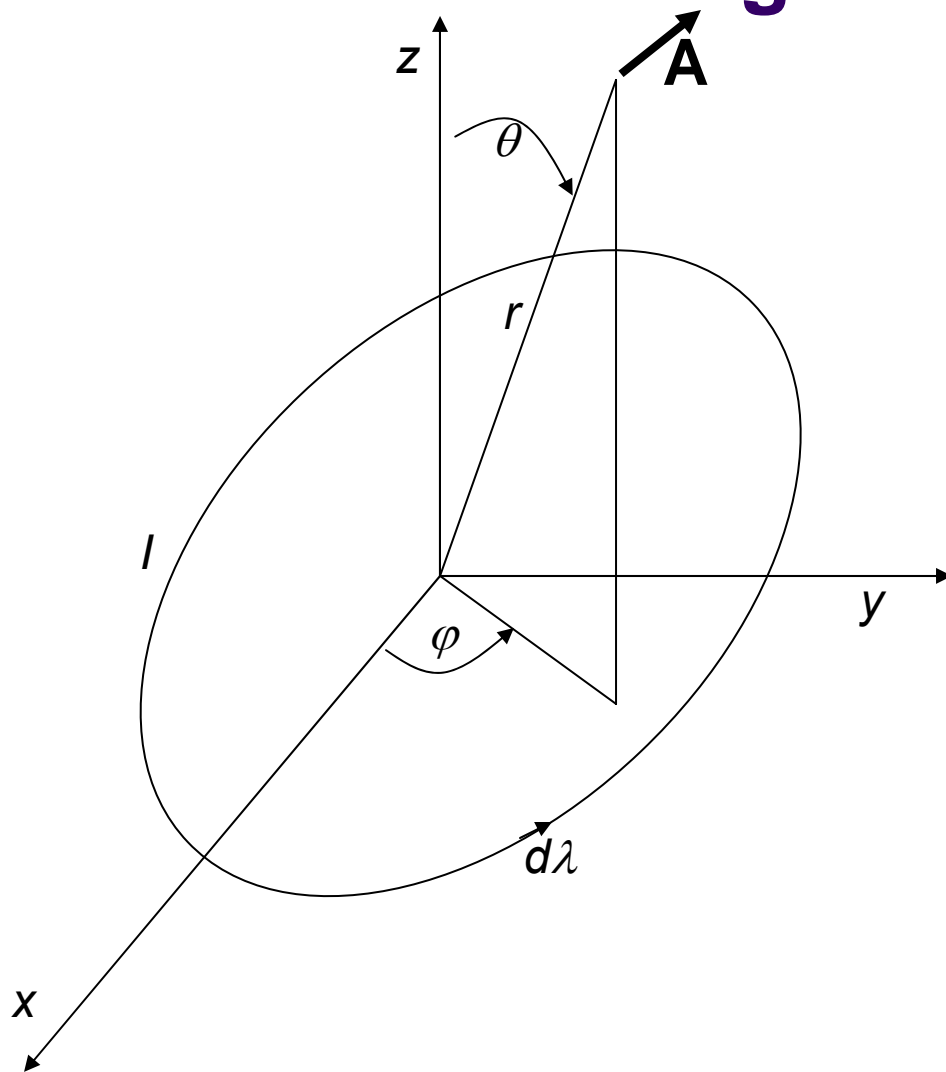
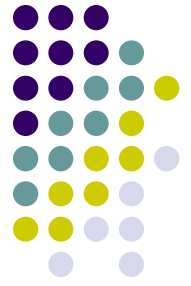
Ortogonalitas Fungsi Legendre Asosiasi:

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q} \quad (3.48)$$

atau dalam koordinat polar:

$$\int_{-1}^1 P_p^m(\cos \theta) P_q^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q} \quad (3.49)$$

# Contoh kasus di Fisika: Medan induksi magnet dari loop arus



Potensial vektor:

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\lambda}{r} \quad (3.50)$$

Dari argumentasi simetri tampak bahwa  $\mathbf{A}$  hanya mempunyai komponen  $\varphi_0$  dan independen dari  $\varphi$ .

$$\mathbf{A} = \hat{\varphi}_0 A_\varphi(r, \theta) \quad (3.51)$$





Persamaan Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (\partial \mathbf{D} / \partial t = 0, \text{ pada satuan MKS}) \quad (3.52)$$

Karena  $\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  maka:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.53)$$

Disini  $\mathbf{J}$  adalah rapat arus. Pada masalah ini nilai  $\mathbf{J}$  adalah nol kecuali pada loop itu sendiri. Jadi untuk yang jauh dari loop:

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\phi}_0 A_\phi(r, \theta) = 0 \quad (3.54)$$

Dalam koordinat sferis:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \hat{\phi}_0 A_\phi(r, \theta) &= \hat{\phi}_0 \left[ -\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cot \theta A_\phi) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Gunakan metode separasi variabel:  $A_\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$



Didapat

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (3.56)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n+1)\Theta - \frac{\Theta}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (3.57)$$

Persamaan yang kedua merupakan Legendre asosiasi dengan  $m=1$

$$\Theta(\theta) = P_n^1(\cos \theta) \quad (3.58)$$

Konstanta separasi  $n(n+1)$  dipilih untuk membuat solusi ini *well behaved*.



Solusi trial  $R(r) = r^\alpha$ , didapat  $\alpha = n, -n - 1$ . Solusi pertama divergen ketika  $r \rightarrow \infty$ . Sehingga solusi yang sesuai:

$$A_{\varphi n} = \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) = c_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta) \quad (3.59)$$

dan:

$$A_\varphi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n^1(\cos \theta) \quad (3.60)$$

Dari potensial vektor ini dapat dicari medan magnet (**latihan!!**)



## 3.4. Harmonik Sferis

Dalam separasi variabel dari (a) pers. Laplace, (b) pers. gelombang klasik bergantung ruang, dan (c) pers. gelombang Schrodinger untuk gaya sentral,

$$\nabla^2 \psi + k^2 f(r) \psi = 0 \quad (3.61)$$

Ketergantungan angular datang sepenuhnya dari operator Laplacian adalah:

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + n(n+1) \Theta \Phi(\varphi) = 0 \quad (3.62)$$



Ketertgantungan azimutal:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (3.63)$$

Dengan solusi:

$$\Phi(\varphi) = e^{-im\varphi}, e^{im\varphi} \quad (3.64)$$

Yang memenuhi kondisi ortogonalitas:

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{im_2\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{m_1,m_2} \quad (3.65)$$

Dapat dibuktikan dengan argumentasi fisis (misal dalam elektrostatik dan kuantum) bahwa  $m$  harus merupakan bilangan bulat (**buktikan!**)



Pers. (3.56) menuntun kepada:

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (3.66)$$

yang merupakan ortonormal (ortogonal dan ternormalisasi) terhadap sudut azimuth  $\varphi$

### Ketergantungan pada Sudut:

Kita lihat kembali ortogonalitas fungsi Legendre Asosiasi pada pers. (3.48) atau (3.49). Kita dapat definisikan fungsi ortonormal dari Legendre asosiasi, yakni:

$$\mathcal{P}_n^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \quad (3.67)$$



Ketergantungan pada sudut dari solusi pers. (3.62) menjadi:

$$\mathcal{P}_n^m(\cos \theta)\Phi(\varphi)$$

Hal terakhir disebut Harmonik sferis, yang dapat ditulis menjadi:

$$Y_n^m(\theta, \phi) \equiv (-1)^m \left[ \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.68)$$

Disini dimasukkan suku fasa  $(-1)^m$  untuk menyesuaikan dan memudahkan pada perhitungan real di banyak kasus Fisika.



Tabel beberapa Harmonik Sferis:

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$$

$$Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

Selengkapnya dapat dilihat di Arfken.



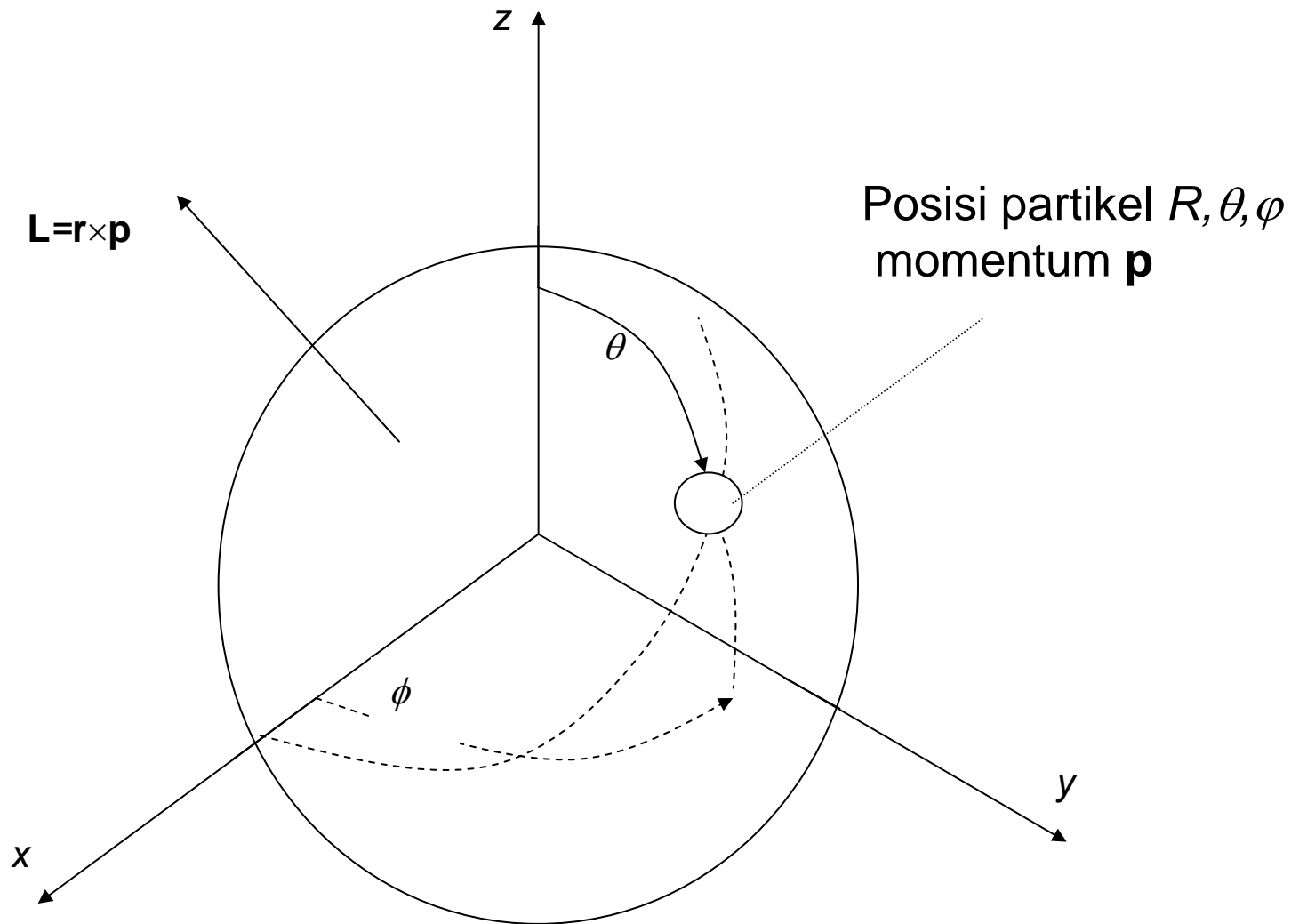
## 3.5. Operator Momentum Angular

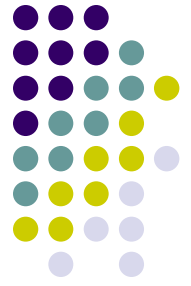


Dalam Mekanika Kuantum, konsep momentum angular memegang peran yang sangat penting serupa dengan yang terjadi pada Mekanika Klassik, disini momentum angular dihubungkan dengan torsi. Namun dalam Mekanika Kuantum kita mengeksplorasi Hamiltonian klasik yang hanya tergantung pada momentum angular.



Sekarang perhatikan sebuah partikel klasik yang bergerak dalam permukaan bola, partikel boleh kemana saja selama tetap berada jarak konstan  $R$  dari pusat bola. Jadi variabel yang tersisa dalam koordinat polar hanya  $(\theta, \phi)$ .





Dalam kasus ini momentum selalu tegak lurus posisi:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0$$

Vektor momentum angular klasik:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Sekarang kita lihat kuadrat dari momentum angular:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = r^2 p^2 = R^2 p^2 \end{aligned}$$

Tidak ada energi potensial pada masalah ini, hanya energi kinetik. Hamiltonian untuk gerakan ini:

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{L^2}{2mR^2} = \frac{L^2}{2I}$$

dengan  $I$  merupakan momen inersia.



Definisi klasik untuk momentum angular  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  memberikan komponen:

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Operator momentum seperti biasanya ditulis:

$$p_x = -i\hbar(\partial / \partial x)$$

atau dalam tiga dimensi

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$$

Sekarang dapat kita evaluasi beberapa komutator:

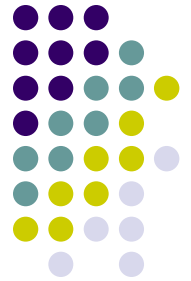
$$[L_x, z] = [yp_z - zp_y, z] = y [p_z, z] = -i\hbar y$$

$$[L_x, p_z] = [yp_z - zp_y, p_z] = -[z, p_z] p_y = -i\hbar p_y$$

$$[L_x, x] = 0$$

$$[L_x, p_x] = 0$$

dan masih banyak lagi komutator serupa.





Hubungan ini dapat diringkaskan:

\* posisi dan momentum:

$$[x, p_x] = i\hbar, \text{ juga } [y, p_y] = i\hbar \text{ dan } [z, p_z] = i\hbar$$

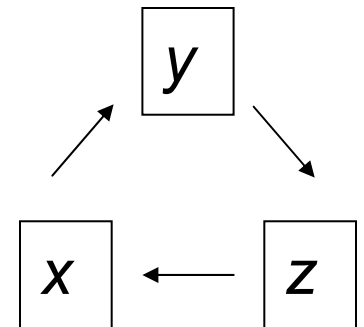
$$[x, p_y] = 0, \text{ juga } [x, p_z] = [y, p_x] = [y, p_z] = [z, p_x] = [z, p_y] = 0$$

\* posisi dan momentum angular:

$$[x, L_x] = [y, L_y] = [z, L_z] = 0$$

$$[x, L_y] = i\hbar z; [y, L_z] = i\hbar x; [z, L_x] = i\hbar y$$

$$[x, L_z] = -i\hbar y; [y, L_x] = -i\hbar z; [z, L_y] = -i\hbar x$$



\* momentum dan momentum angular:

$$[p_x, L_x] = [p_y, L_y] = [p_z, L_z] = 0$$

$$[p_x, L_y] = i\hbar p_z; [p_y, L_z] = i\hbar p_x; [p_z, L_x] = i\hbar p_y$$

$$[p_x, L_z] = -i\hbar p_y; [p_y, L_x] = -i\hbar p_z; [p_z, L_y] = -i\hbar p_x$$

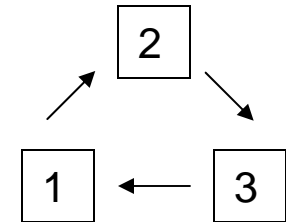
Sekarang kita gunakan komutator-komutator tersebut untuk menyelesaikan hubungan komutasi antar komponen  $\mathbf{L}$ .

Misalnya:

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [L_x, zp_x - xp_z] = [L_x, z]p_x - x[L_x, p_z] \\ &= -i\hbar yp_x + i\hbar xp_y = i\hbar L_z \end{aligned}$$

Dengan mudah dapat dibuktikan juga:

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \text{ dan } [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$



Secara simbolik dapat ditulis:

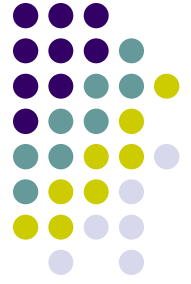
$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k \text{ dengan } i, j, k = x, y, z$$

$\varepsilon_{ijk}$  adalah Levi civita yang bernilai +1 untuk permutasi genap/ siklis (123, 231, 312) dan -1 untuk permutasi ganjil/ antisiklis (132, 321, 213), serta bernilai nol kalau ada indeks yang sama.



Sekarang kita lihat kuadrat dari momentum angular

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$



Evaluasi komutator berikut:

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}^2, L_z] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z] = [L_x^2 + L_y^2, L_z] \\ &= L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x + L_y[L_y, L_z] + [L_y, L_z]L_y \\ &= -i\hbar L_x L_y - i\hbar L_y L_x + i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y = 0 \end{aligned}$$

Dapat dibuktikan juga berlaku untuk  $L_x$  dan  $L_y$

$$[\mathbf{L}^2, L_i] = 0, \quad i=x,y,z$$





Karena  $\mathbf{L}^2$  berkomutasi dengan semua komponen momentum angular, kita dapat temukan eigenstate simultan dari  $\mathbf{L}^2$  dan salah satu komponen  $\mathbf{L}$ .

Biasanya dipilih  $\mathbf{L}^2$  dan  $L_z$ . Anggap harga eigen masing-masing  $\lambda$  dan  $m$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 |\lambda m\rangle &= \lambda |\lambda m\rangle \\ L_z |\lambda m\rangle &= m\hbar |\lambda m\rangle\end{aligned}$$

Dalam representasi  $(\theta, \varphi)$  fungsi eigen:

$$\langle \theta, \varphi | \lambda m \rangle = \psi_{\lambda m}(\theta, \varphi)$$



Kita dapatkan:

$$\langle \theta, \varphi | \mathbf{L}^2 | \lambda m \rangle = \lambda \langle \theta, \varphi | \lambda m \rangle$$

$$\langle \theta, \varphi | L_z | \lambda m \rangle = m \hbar \langle \theta, \varphi | \lambda m \rangle$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, maka perlu menyatakan  $\mathbf{L}^2$  dan  $L_z$  dalam representasi  $(\theta, \varphi)$ .

Berikut akan dibuktikan bahwa representasi  $\langle \theta, \varphi | \lambda m \rangle$  atau  $\psi_{\lambda m}(\theta, \varphi)$  adalah harmonik sferis  $Y_{\lambda}^m(\theta, \phi)$



$\mathbf{L}^2$  dan  $L_z$  dalam representasi  $(\theta, \phi)$ :

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$

**Tampak bahwa:**

$$L_z Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta, \phi)$$



# Pendekatan Operator Secara Umum

Sekarang kita tinjau metode operator, sebut saja triplet operator momentum angular  $J_x, J_y, J_z$  yang tidak tergantung pada representasi. Ketiga operator ini tidak terbatas pada  $L_x, L_y, L_z$  yang didefinisikan dari hubungan Klassik.

Hubungan komutasi:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad x, y, z \text{ siklis}$$

Kita definisikan:

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$



Maka, seperti sebelumnya:

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0, \quad i = x, y \text{ atau } z$$

Sekarang kita pilih eigenstate yang merupakan eigenstate simultan untuk  $\mathbf{J}^2$  dan  $J_z$  dengan harga eigen  $\lambda_J$  dan  $m\hbar$ .

$$\mathbf{J}^2 |\lambda_J m\rangle = \lambda_J |\lambda_J m\rangle$$

$$J_z |\lambda_J m\rangle = m\hbar |\lambda_J m\rangle$$

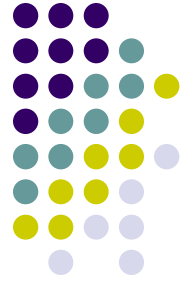
Lalu kita definisikan operator non-hermitian:

$$J_+ = J_x + iJ_y$$

$$J_- = J_x - iJ_y$$

Komutasi dengan  $J_z$  dapat dengan mudah dievaluasi:

$$\begin{aligned} [J_z, J_+] &= \hbar J_+ & ; & & [J_z, J_-] &= -\hbar J_- \\ [J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \end{aligned}$$



Lebih lanjut dapat dibuktikan (latihan!)

$$\begin{aligned} J_+ J_- &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z \\ J_- J_+ &= \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z \end{aligned}$$

Pengenalan pada  $J_+$ ,  $J_-$  tidaklah begitu aneh, karena serupa pada kasus operator tangga naik/turun dalam osilator harmonis (akan dibahas pada bab berikutnya)



Dari relasi komutasi, diperoleh  $J_z J_+ = J_+ (J_z + \hbar)$

Sehingga:

$$J_z J_+ |\lambda_J m\rangle = J_+ (J_z + \hbar) |\lambda_J m\rangle = (m+1) \hbar J_+ |\lambda_J m\rangle$$

Tampak bahwa  $J_+ |\lambda_J m\rangle$  merupakan eigenstate dari  $J_z$  yang memiliki harga eigen  $(m+1) \hbar$ . Oleh karena itu  $J_+$  disebut sebagai operator tangga naik.



Hal serupa dapat dibuktikan

$$J_z J_- |\lambda_j m\rangle = (m-1) \hbar J_- |\lambda_j m\rangle$$

Jadi  $J_-$  merupakan operator tangga turun.

Dapat ditulis:

$$J_+ |\lambda_j m\rangle = c \lambda_j m |\lambda_j m+1\rangle$$

$$J_- |\lambda_j m\rangle = d \lambda_j m |\lambda_j m-1\rangle$$

Dengan  $c$  dan  $d$  merupakan konstanta yang harus dihitung.





Sebelum menghitung itu kita lihat bahwa nilai  $m$  punya batas bawah dan batas atas. Hal ini secara mudah dibuktikan dengan kenyataan bahwa harga ekspektasi  $J_x^2 + J_y^2$  tidak bisa negatif, atau:

$$0 \leq \langle \lambda_J m | J_x^2 + J_y^2 | \lambda_J m \rangle = \langle \lambda_J m | \mathbf{J}^2 - J_z^2 | \lambda_J m \rangle = \lambda_J - (m\hbar)^2$$

Jadi  $(m\hbar)^2 \leq \lambda_J$ , artinya untuk nilai  $\lambda_J$  tertentu nilai  $m$  dibatasi, yakni ada  $m_{\min}$  dan  $m_{\max}$ .



Di atas  $m_{\max}$  tidak ada keadaan lagi, artinya:

$$J_+ |\lambda_J m_{\max}\rangle = 0$$

dan juga

$$J_- J_+ |\lambda_J m_{\max}\rangle = 0$$

atau  $(\mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z) |\lambda_J m_{\max}\rangle = 0$ ,

hal ini memberikan:

$$\lambda_J - m_{\max} (m_{\max} + 1) \hbar^2 = 0$$

Hal serupa dari kenyataan tidak ada lagi keadaan

di bawah  $m_{\min}$ , maka  $J_- |\lambda_J m_{\min}\rangle = 0$ , diperoleh:

$$\lambda_J - m_{\min} (m_{\min} - 1) \hbar^2 = 0$$



Kedua persamaan digabung, diperoleh:

$$m_{\max} (m_{\max} + 1) = m_{\min} (m_{\min} - 1)$$

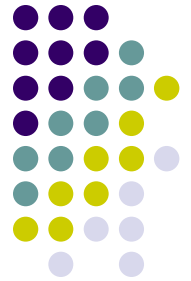
Salah satu solusi persamaan ini:  $m_{\min} = m_{\max} + 1$ , hal ini tentu saja tidak mungkin. Solusi yang benar adalah:

$$m_{\max} = -m_{\min}$$

Misal  $m_{\max} = j$ , maka

$$\lambda_j = j(j + 1) \hbar^2$$

Hasil terakhir ini sangat mirip dengan harga eigen  $L^2$  yang dikerjakan (dengan susah payah!) menggunakan cara diferensial.



Tetapi apakah **J** dan **L** sama persis? Ternyata tidak, bahkan akan ada kejutan disini.

Nilai  $j$  tidak boleh sembarang, hal ini terlihat:

$$m_{\max} - m_{\min} = j - (-j) = 2j$$

Karena  $m_{\max} - m_{\min}$  selalu bulat positif atau nol, maka  $2j$  demikian juga.

Artinya  $j$  bisa bulat, nol atau setengah-bulat (*half-integer*).

Kondisi  $j$  yang dapat mempunyai nilai setengah-bulat ini agak mengejutkan karena berbeda dengan  $l$  dari  $L^2$  yang hanya boleh bernilai bilangan bulat positif atau nol. Jadi tampak bahwa  $J^2$  dan  $L^2$  sedikit berbeda.



Apakah fisisnya ada untuk kasus  $j$  setengah bulat (yang secara Klassik tidak ada analoginya)? Ternyata ada yaitu untuk momentum angular spin.

Selanjutnya  $L$  disebut sebagai momentum angular orbital,  $S$  disebut sebagai momentum angular spin. Sedangkan momentum angular  $J$  merujuk ke  $L$ ,  $S$ , atau jumlah keduanya.



Sekarang kita evaluasi nilai konstanta  $c$  dan  $d$ .  
Keadaan  $|\lambda_j m\rangle$  kita tulis saja sebagai  $|jm\rangle$ .

Karena  $J_- = J_+^\dagger$

maka

$$\langle jm | J_- J_+ | jm \rangle = \langle (J_+^\dagger) jm | J_+ | jm \rangle = |c_{jm}|^2$$

Sementara

$$\begin{aligned} \langle jm | J_- J_+ | jm \rangle &= \langle jm | \mathbf{J}^2 - J_z^2 - \hbar J_z | jm \rangle \\ &= j(j+1)\hbar^2 - m^2 \hbar^2 - \hbar m \hbar \end{aligned}$$

Jadi

$$c_{jm} = \hbar [j(j+1) - m(m+1)]^{1/2}$$



Evaluasi  $J_+J_-$  pada  $|jm\rangle$  akan menghasilkan

$$d_{jm} = \hbar [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2}$$

Dapat diringkaskan untuk kedua operator tangga

$$J_+ |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |jm+1\rangle$$

$$J_- |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |jm-1\rangle$$



# Pelajari Sendiri

- Teorema Adisi untuk Harmonik Sferis
- Integral dari hasil kali 3 Harmonik Sferis
- Fungsi-fungsi Legendre Jenis Kedua





- Bab 04