4. Fungsi Khusus Lainnya

(Hermite, Laguerre, Polinomial Chebyshev, Hipergeometri)

4.1. Fungsi Hermite

Fungsi generator untuk polinomial Hermit: $H_n(x)$:

$$g(x,t) \equiv e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (4.1)$$

Hubungan rekursi:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \qquad (4.2)$$

dan

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \qquad (4.3)$$

(turunkan f.g. thd $t \rightarrow$(4.2); thd $x \rightarrow$(4.3))

Dari fungsi generator dapat langsung diperoleh: $H_0(x)=1$ dan $H_1(x)=2x$.

Daftar beberapa fungsi Hermite:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

Beberapa polinomial Hermite yang bernilai khusus:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

$$H_{2n+1}(0) = 0 \qquad (4.4)$$

Hubungan paritas: (diperoleh dari f.g.)

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x) \qquad (4.5)$$

(buktikan!)

Representasi Alternatif:

Diferensiasikan fungsi generator *n* kali terhadap *t* kemudian masukkan *t*=0, akan didapat:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (4.6)$$

Ini merupakan representasi Rodrigues.

Ortogonalitas Fungsi Hermite

Hubungan rekursi (4.2) dan (4.3) dapat membentuk pers. differensial orde-2:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (4.7)$$

Fungsi ini tidak mempunyai sifat ortogonal. Supaya mempunyai sifat ortogonal, maka dikalikan dengan fungsi pemberat:

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2} H_n(x) \qquad (4.8)$$

Kembalikan ke (4.7) didapat:

$$\varphi_n''(x) + (2n + 1 - x^2)\varphi_n(x) = 0 \qquad (4.9)$$

Persamaan differensial ini dijumpai pada mekanika kuantum pada kasus osilator harmonis.

Dengan menggunakan fungsi generator (detail lihat Arfken), dapat diperoleh ortogonalitas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 \, dx = 2^n \pi^{1/2} n! \qquad (4.10)$$

Osilator Harmonis Sederhana pada Mekanika Kuantum

Potensial osilator harmonis:

$$V(z) = \tfrac{1}{2} k z^2$$

Persamaan gelombang Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(z) + \tfrac{1}{2} k z^2 \Psi(z) = E\Psi(z)$$

Gunakan penyingkatan:

$$x = \alpha z \text{ dengan } \quad \alpha^4 = \frac{mk}{\hbar^2} = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}$$

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{K}\right)^{1/2} = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

Diperoleh

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\lambda - x^2)\psi(x) = 0$$

Persamaan ini serupa (4.9) dengan $\lambda=2n+1$.
Jadi:

$$\psi_n(x) = 2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x) \qquad \text{(ternormalisasi)}$$

Syarat batas fisis mengharuskan:

$$\lim_{z\to\pm\infty}\Psi(z) = 0$$

Hanya dapat dipenuhi bila *n* bilangan bulat.

Dengan demikian didapat kondisi kuantisasi:

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

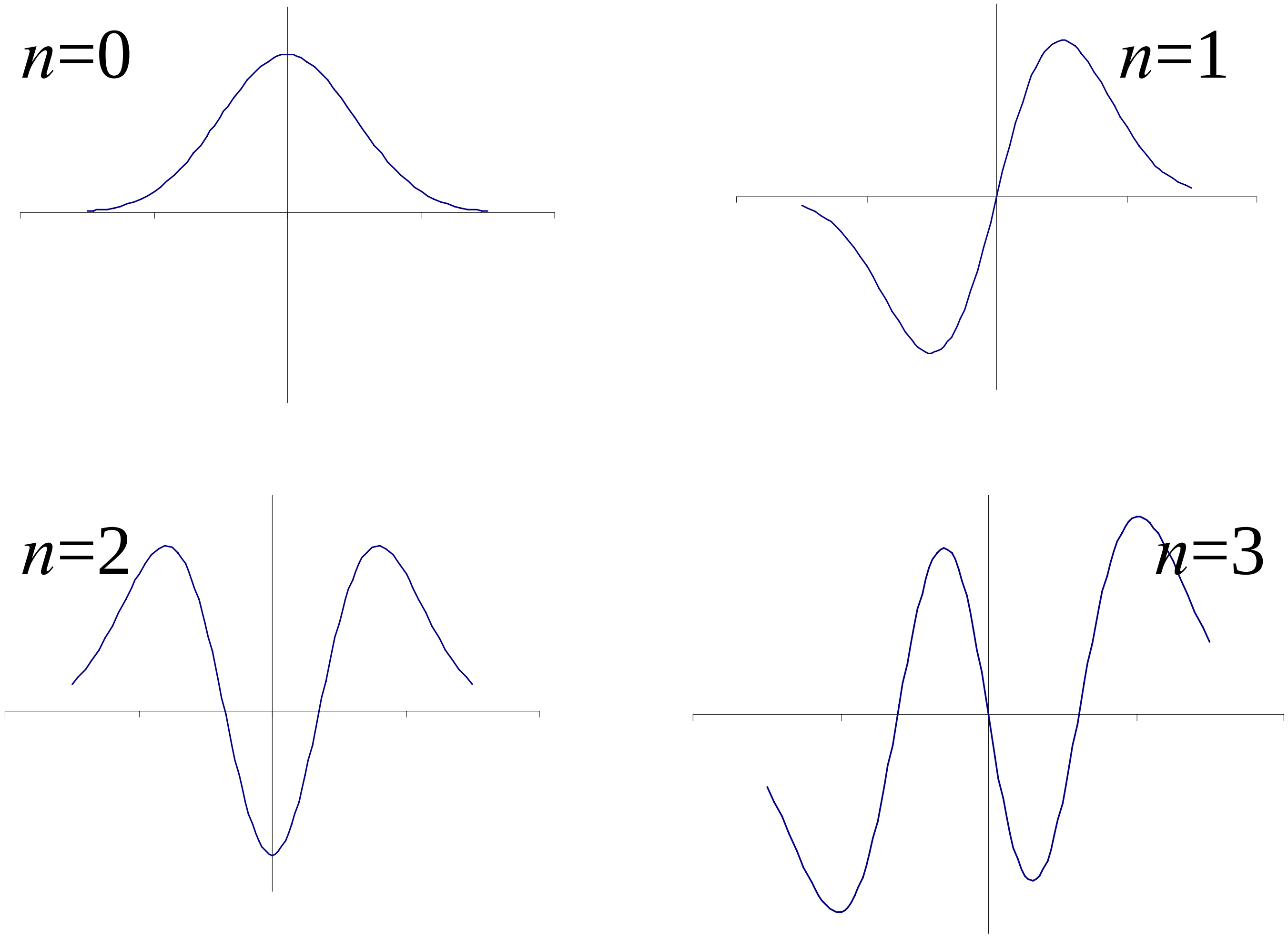
n bilangan bulat: $n \geq 0$.

Energi terendah:

$$E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$

Energi titik nol ini merupakan aspek prinsip ketidakpastian, murni fenomena kuantum.

Beberapa contoh fungsi eigen osilator harmonis



Latihan:

1. Probabilitas transisi antara dua keadaan osilator tergantung pada bentuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx$$

Tunjukkan bahwa hasil integral ini

$$\pi^{1/2} 2^{n-1} n!\, \delta_{m,n-1} + \pi^{1/2} 2^n (n+1)!\, \delta_{m,n+1}$$

(Apa makna fisisnya?)

2. Dengan cara deduksi, tunjukkan:

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n 1 = H_n(x)$$

Raising and Lowering Operator

Dalam Mekanika Kuantum dikenal operator tangga naik (*raising*) dan tangga turun (*lowering*)

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

Operator momentum: $p = -i\hbar\nabla$

Dalam satu dimensi dan dalam satuan:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$$

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$

$$a\psi_n = n^{1/2}\psi_{n-1}$$

$$a^{+}\psi_n = (n+1)^{1/2}\psi_{n+1}$$

Energi terendah pada *n*=0, sehingga:

$$a\psi_0 = 0$$

atau $$\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi_0 = 0$$

Menghasilkan: $$\psi_0 = \pi^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Latihan: Dari sini carilah fungsi dengan *n* lebih tinggi

Latihan:

Dengan $\psi_n(x) = 2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x)$

Tunjukkan bahwa:

$$a\psi_n(x) = n^{1/2}\psi_{n-1}(x)$$

$$a^+\psi_n(x) = (n+1)^{1/2}\psi_{n+1}(x)$$

4.2. Fungsi Laguerre

Persamaan diferensial Laguerre:

$$x\,y'' + (1-x)\,y' + n\,y = 0$$

Polinomial ini dapat dirumuskan dari formula Rodriguess:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right).$$

Fungsi generator:

$$g(x,z) = \frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n \qquad |z|<1$$

Beberapa polinomial Laguerre:

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = 1 - x$

$L_2(x) = 2 - 4x + x^2$

$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$

Hubungan rekursi (buktikan!):

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

$$xL'_{n+1}(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

Persamaan diferensial Laguerre tidak self-adjoint, dan polinomial Laguerre L_n tidak saling ortogonal.

Namun himpunan fungsi

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x)$$

adalah ortonormal, yakni:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{m,n}$$

Fungsi ortonormal baru memenuhi p.d.:

$$x\varphi_n''(x) + \varphi_n'(x) + \left(n + \tfrac{1}{2} - \tfrac{x}{4}\right)\varphi_n(x) = 0$$

Fungsi Laguerre Asosiasi

Dalam pemakaian, khususnya di teori Kuantum, yang banyak dipakai adalah fungsi Laguerre asosiasi

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[L_{n+k}(x)]$$

Pers. diferensial:

$$xL_n^{k''}(x) + (k+1-x)L_n^{k'}(x) + nL_n^k(x) = 0$$

Representasi Rodriguess:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k})$$

Pemakaian Laguerre Asosiasi: Atom Hidrogen

Ketika Mekanika Kuantum dikembangkan pada abad ke-19, salah satu pemakaiannya adalah untuk mengerti atom hidrogen dan hidrogenik (serupa hidrogen, atom dengan satu elektron valensi).

Potensial dalam medan Coulomb dapat ditulis:

$$V(r) = -Ze^2/r$$

Dengan Ze merupakan muatan inti atom.

Problem pada atom hidrogen atau atom serupa hidrogen merupakan kasus spesial potensial sentral. Solusi umum dapat ditulis:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = \sum_{nlm} C_{nlm} R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta,\phi)$$

Persamaan radial untuk potensial Coulomb:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \right) R + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) R = 0$$

Untuk mempermudah, kita gunakan variabel tanpa dimensi

$$\rho = \left(\frac{8\mu |E|}{\hbar^2} \right)^{1/2} r \qquad \lambda = \frac{Ze^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2}$$

dengan substitusi ini persamaan menjadi

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}R + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R = 0$$

Persamaan terakhir ini sesuai dengan p.d. Laguerre asosiasi.

Solusi persamaan radial (belum normalisasi) menjadi:

$$R_{nl}(\rho) = -e^{-\rho/2} \rho^{l} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

Dari hal ini, solusi radial ternormalisasi menjadi:

$$R_{nl}(r) = -\left[\left(\frac{2Z}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3} \right]^{1/2} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^l e^{-Zr/na_0} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right)$$

disini telah digunakan $\rho = 2Zr/na_0$ *dan* $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$

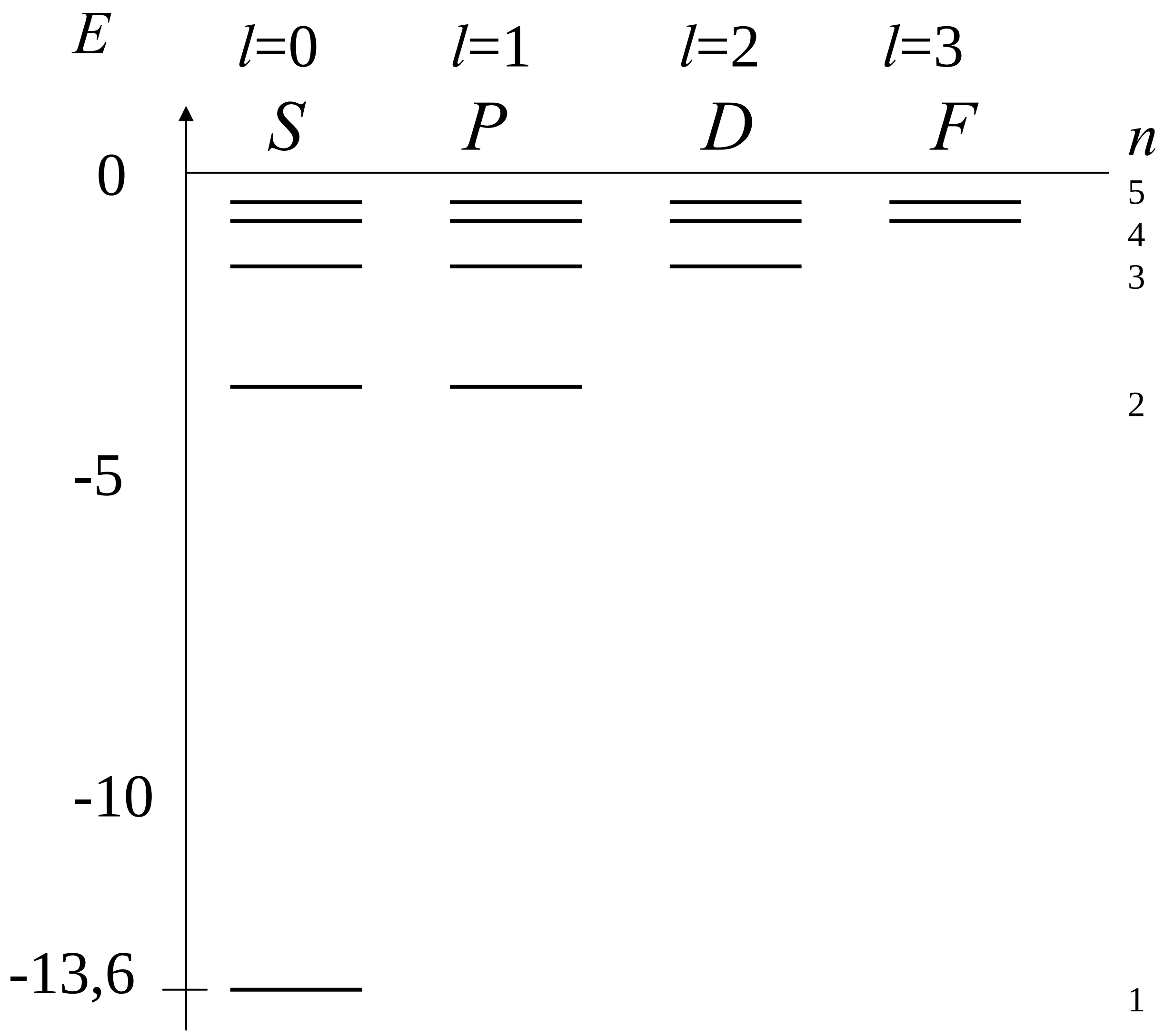
Selanjutnya persamaan

$$\lambda = \frac{Ze^2}{\hbar}\left(\frac{\mu}{2|E|}\right)^{1/2}$$

menjadi:

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Persamaan terakhir ini sama dengan yang ditemukan oleh Bohr. Namun tentu saja Bohr tidak dapat meramalkan spektrum dari momentum angular.


E
l=0
l=1
l=2
l=3
S
P
D
F
n
0
5
4
3
2
-5
-10
-13,6
1

Beberapa fungsi radial hidrogenik:

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} 2\left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} 3^{-1/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{30}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} 2\left[1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2(Zr)^2}{27a_0^2}\right] e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{31}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Zr}{a_0}\left[1 - \frac{Zr}{6a_0}\right] e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{32}(r) = \left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/3a_0}$$

Latihan

Bagian radial fungsi gelombang hidrogenik ternormalisasi dapat ditulis:

$$R_{nl}(r) = -\left[(\alpha)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3}\right]^{1/2} (\alpha r)^l e^{-\alpha r/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\alpha r)$$

$$\text{dengan}\, \alpha = \frac{2Z}{na_0} = \frac{2Zme^2}{n\hbar^2}$$

Carilah:

$$(a).\ \langle r \rangle = \int_0^\infty r R_{nl}(\alpha r) R_{nl}(\alpha r) r^2$$

Makna fisis?

$$(b).\ \langle r^{-1} \rangle = \int_0^\infty r^{-1} R_{nl}(\alpha r) R_{nl}(\alpha r) r^2$$

4.3. Polinomial Chebyshev (Tschebyscheff)

Persamaan diferensial Chebyshev:

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + n^2\,y = 0$$

$$(1-x^2)\,y'' - 3x\,y' + n(n+2)\,y = 0$$

P.d. ini dapat dikembangkan dari polinomial Gegenbauer (pers. 3.13):

$$\frac{2^{\beta}}{(1-2xt+t^2)^{\beta+1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{(\beta-\frac{1}{2})!}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{\beta}(x)t^n$$

Kita tahu pada β=0 maka polinomial ini menjadi Legendre.

Untuk $\beta = \pm½$ dapat dihasilkan dua macam polinomial yang disebut Chebyshev.

Tipe II: $\beta = +½$

$$\frac{2^{1/2}}{(1-2xt+t^2)} = \frac{\pi^{1/2}}{(0)!}\sum_{n=0}^{\infty} T_n^{1/2}(x)t^n$$

Lebih mudah kalau ditulis:

$$\pi^{1/2}T_n^{1/2}(x) \equiv U_n(x)$$

Polinomial Chebyshev tipe II

Sehingga:

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$$

Tipe I: $\beta = -½$

Jelas akan ada masalah karena $(\beta - 1)!$ meledak.

Namun hal ini dapat dihindari dengan terlebih dahulu mendiferensialkan terhadap *t* baru kemudian masukkan $\beta = -½$.

Didapat:

$$\frac{(x-t)}{(1-2xt+t^2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} n T_n^{1/2}(x) t^{n-1}$$

Kalikan dengan 2*t* kemudian tambah 1, didapat:

$$\frac{(1-t^2)}{(1-2xt+t^2)} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} 2n T_n^{1/2}(x) t^n$$

Untuk *n*>0 dapat didefinisikan:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, n T_n^{-1/2}(x) \equiv T_n(x)$$

sehingga dapat ditulis polinomial Chebyshev tipe I:

$$\frac{(1-t^2)}{(1-2xt+t^2)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n$$

Untuk *n*=0, dapat didefinisikan:

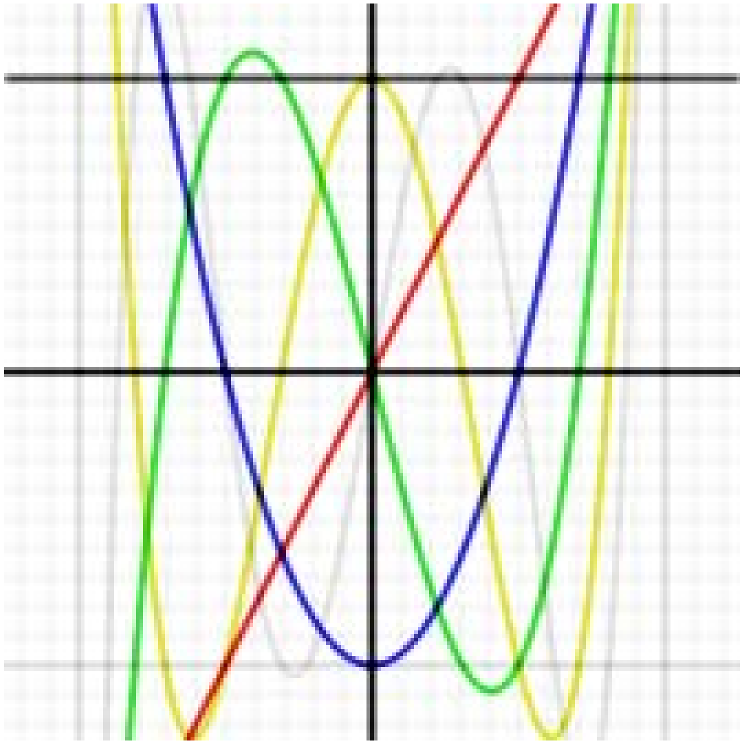
$$T_0(x) = 0$$

Hubungan rekursi dapat diperoleh dari fungsi generator:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

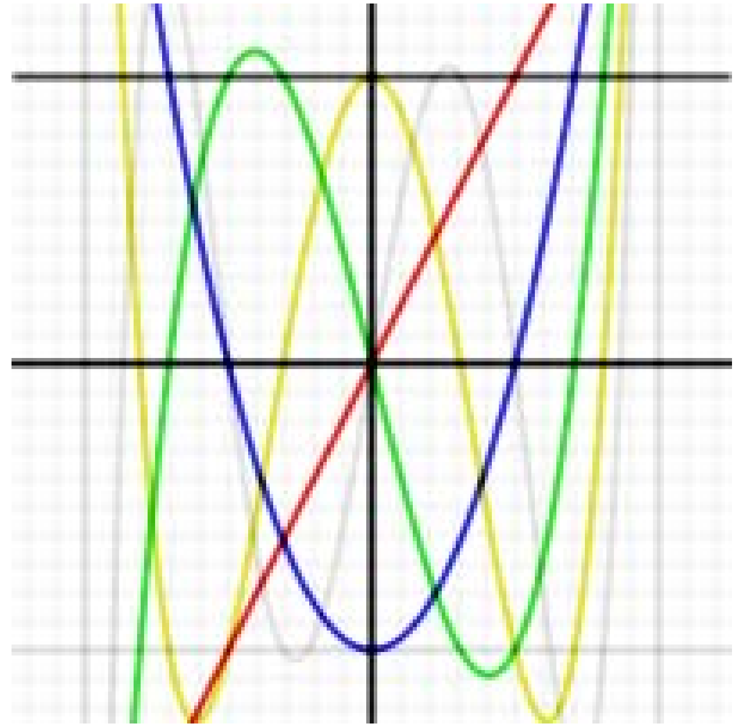
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Beberapa bentuk $T_n(x)$



$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1 \\
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1 \\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.
\end{aligned}
$$

Beberapa bentuk $U_n(x)$



$$U_0(x) = 1$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$
$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$
$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$
$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$
$$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$
$$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x.$$

Beberapa hubungan rekursi lainnya dan derivatif:

Berasal dari fungsi generator:

$$(1-x^2)T_n'(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

$$(1-x^2)U_n'(x) = -nxU_n(x) + (n+1)U_{n-1}(x)$$

Gabung dengan rekursi sebelumnya didapat p.d. Chebychev tipe I dan II:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xT_n'(x) + n(n+2)T_n(x) = 0$$

Nilai-nilai spesial dapat diperoleh dari fungsi generator:

$$T_n(1) = 1$$
$$T_n(-1) = (-1)^n$$
$$U_n(1) = n + 1$$
$$U_n(-1) = (n + 1)(-1)^n$$

Ortogonalitas:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi/2 & : n = m \end{cases}$$

Lihat di Arfken untuk latihan.

4.4. Fungsi Hipergeometrik
4.5. Fungsi Konfluent Hipergeometrik

(Pelajari Sendiri!!)

Ke Bab 05