5. Transformasi Integral dan Persamaan Integral

5.1. Transformasi Integral

5.2. Transformasi Laplace

5.3. Transformasi Fourier

5.4. Persamaan Integral

5.1. Transformasi Integral

Di dalam Fisika Matematika kita sering menjumpai pasangan fungsi yang dihubungkan sbb:

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t) K(\alpha, t) dt$$

Fungsi $g(\alpha)$ disebut transformasi (integral) dari $f(t)$ dengan kernel $K(\alpha,t)$.

→ Mapping fungsi $f(t)$ di ruang-t dari fungsi $g(\alpha)$ di ruang-α.

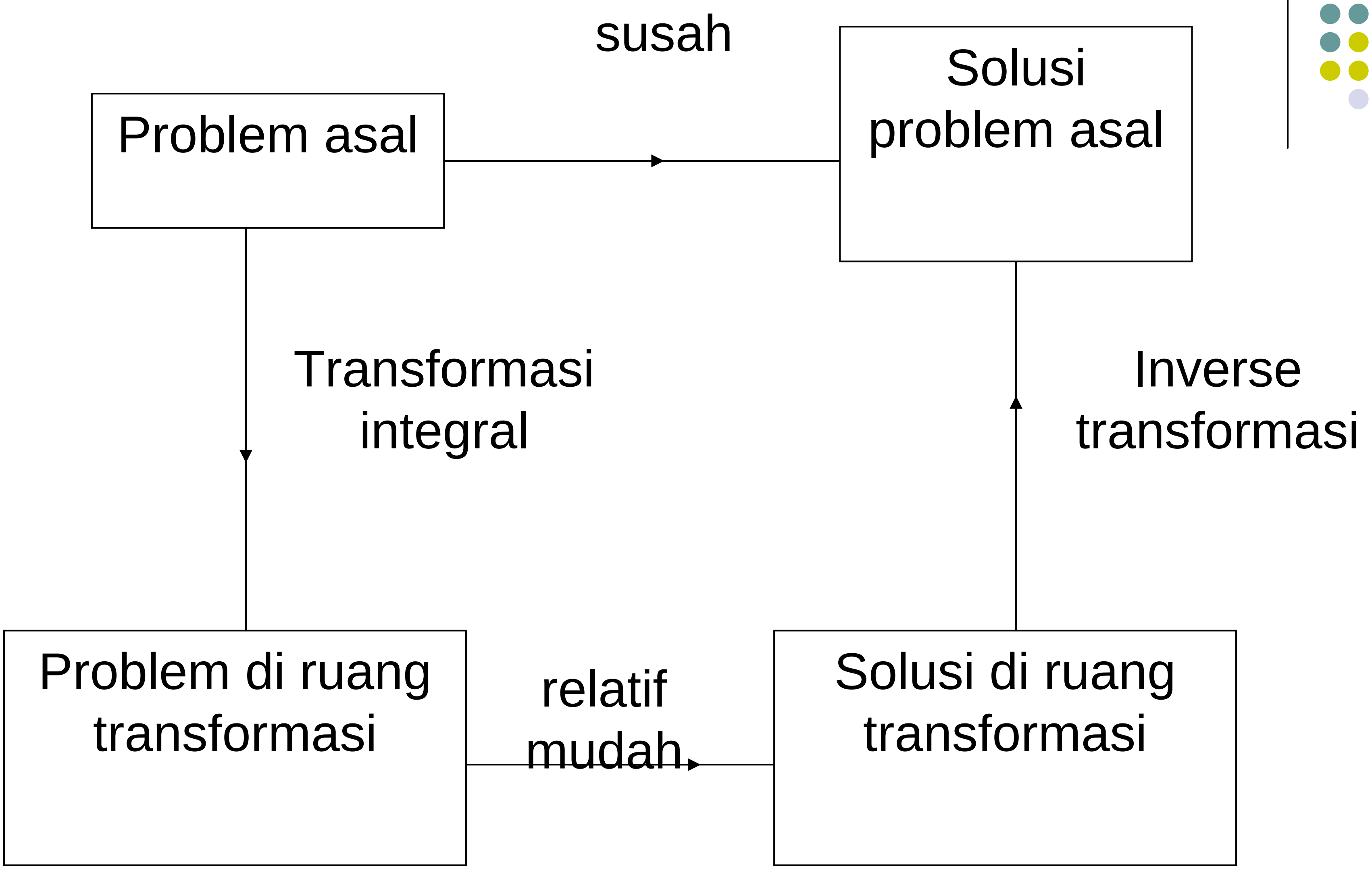
Mengapa kita butuh transformasi integral??

Karena dalam banyak kasus masalah lebih mudah diselesaikan dengan cara transformasi dan inversi.

Kita membutuhkan representasi dalam ruang lain.

Contoh di fisika:

waktu ⇔ frekuensi
ruang real ⇔ ruang momentum


susah
Problem asal
Solusi problem asal
Transformasi integral
Inverse transformasi
Problem di ruang transformasi
relatif mudah
Solusi di ruang transformasi

Satu diantara transformasi yang terpenting → Fourier

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$$

Ada tiga lainnya:

Transformasi Laplace:

$$g(\alpha) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} dt$$

Transformasi Hankel (Fourier-Bessel)

$$g(\alpha) = \int_{a}^{b} f(t) t J_n(\alpha t) dt$$

Transformasi Mellin

$$g(\alpha) = \int_{a}^{b} f(t) t^{\alpha-1} dt$$

5.2. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace $f(s)$ atau L dari $F(t)$ didefinisikan:

$$f(s) = L\{F(t)\} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}F(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

Beberapa fungsi sederhana:

1) $F(t) = 1,\ \ t > 0$

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

2) $F(t) = e^{kt},\ \ t > 0$

$$L\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt = \frac{1}{s-k}, \text{untuk } s > k$$

3) Fungsi hiperbolik sinus dan kosinus

Karena:

$\cosh(kt) = ½ (e^{kt} + e^{-kt})$ dan

$\sinh(kt) = ½ (e^{kt} - e^{-kt})$

Maka

$$L\{\cosh(kt)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right) = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

dan

$$L\{\sinh(kt)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) = \frac{k}{s^2 - k^2}$$

4) Fungsi sinus dan kosinus biasa

dengan menggunakan:
cos (kt) = cosh (ikt) dan sin (kt) = $-i$ sinh (ikt)

diperoleh:

$$L\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

dan

$$L\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

5) $F(t) = t^n$

$$L\{t^t\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{s+1}}$$

Tabulasi:

$F(t)$	$f(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

Tabel lengkap dapat dilihat di Arfken

Contoh soal:

1. Carilah $F(t)$ bila

$$f(s) = \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$$

Jawab:

Fungsi $f(s)$ dapat diuraikan menjadi:

$$f(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s^2 + k^2)}$$

dengan substitusi balik, diperoleh $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, sehingga:

$$f(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2 + k^2)}$$

dengan demikian inverse $f(s)$ menjadi:

$$F(t) = 1 - \cos(kt)$$

2. Carilah $F(t)$ bila

$$f(s) = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

Jawab:

Fungsi $f(s)$ dapat diuraikan menjadi:

$$f(s) = \frac{As + B}{s + k} + \frac{Cs + D}{s - k}$$

$$= \frac{As^2 - Aks + Bs - Bk + Cs^2 + Ds + Cks + Dk}{s^2 - k^2}$$

dengan substitusi balik, diperoleh $A = 0$, $B = 1/2$, $C = 0$, D=1/2 sehingg

Turunan Transformasi Laplace

per-definisi:

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dF}{dt} dt$$

integrasi bagian:

$$L\{F'(t)\} = e^{-st} F(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

$$= sL\{F(t)\} - F(0)$$

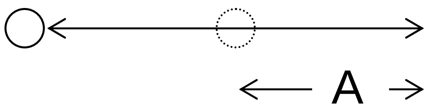
kalau diteruskan

$$L\{F^{(2)}(t)\} = s^2 L\{F(t)\} - sF(t) - F'(0)$$

dan seterusnya:

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n L\{F(t)\} - s^{n-1}F(t) - s^{n-1}F'(t) \ldots - F^{(n-1)}(0)$$

Contoh di Fisika:
Kasus osilator harmonis:



$t=0,\ y=y_o,\ y'=0$

$$F = -ky \rightarrow \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

Kalau pada persamaan diferensial kita lakukan tranformasi Laplace:

$$L\{y''\} = -\omega^2 L\{y\}$$
$$s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) = -\omega^2 L\{y\}$$

masukkan syarat batas, diperoleh:

$$L\{y\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} y_0$$

inverse transformasi ini menghasilkan:

$y = y_o \cos \omega t$ (seperti yang diharapkan)

Pertanyaan, apabila syarat batas diubah menjadi

t=0, y =0, y'=v_o

apa yang terjadi?

(Jawab: $y = v_o/\omega \sin \omega t$, buktikan!)

Sifat-sifat lain fungsi Laplace

1. Substitusi

$f(s\text{-}a) = L\{e^{at}F(t)\}$ (buktikan!)

Sehingga:

$$L\{e^{at}\sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$$

$$L\{e^{at}\cos kt\} = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+k^2}$$

2. Translasi

$e^{-bs}f(s) = L\{F(t\text{-}b)\}$ (buktikan!)

3. Turunan suatu transformasi

Turunan ke-n:

$f^{(n)}(s) = L\{(-t)^n F(t)\}$ (buktikan!)

4. Integrasi suatu transformasi

$$\int_s^\infty f(x)dx = L\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$$

Contoh kasus: Osilator Teredam

Kasus getaran harmonis teredam:

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0$$

dengan *m,k,b* adalah konstan.

Bila kita gunakan kondisi inisial $X(0)=X_0$, $X'(0)=0$, maka persamaan transformasi menjadi:

$$m[s^2 x(s) - sX_0] + b[s\ x(s) - X_0] + kx(s) = 0$$

dan

$$x(s) = X_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k}$$

Persamaan terakhir dapat diselesaikan dengan melengkapi kuadrat penyebut sbb:

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)$$

Apabila faktor redaman (*damping*) kecil, $b^2 < 4km$, suku terakhir adalah positif dan sebut sebagai ω_1^2

$$x(s) = X_0 \frac{s + b/m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}$$

$$= X_0 \frac{s + b/2m}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2} + X_0 \frac{(b/2m\omega_1)\omega_1}{(s + b/2m)^2 + \omega_1^2}$$

Kita gunakan $L\{e^{at}\sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$

$$L\{e^{at}\cos kt\} = \frac{(s-a)}{(s-a)^2 + k^2}$$

Didapat:

$$X(t) = X_0 e^{-(b/2m)t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t\right)$$

$$= X_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-(b/2m)t}\cos(\omega_1 t - \varphi)$$

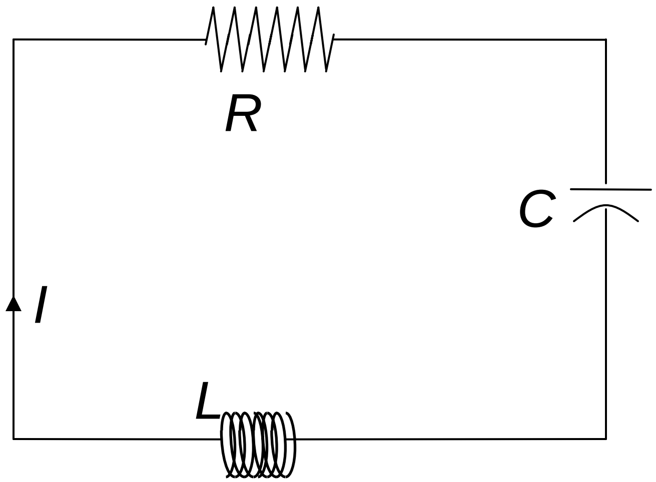
dengan

$$\tan\varphi = \frac{b}{2m\omega_1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

RLC Analog

Ada keserupakan antara osilator harmonis teredam dengan rangkaian RLC



Dari hukum Kirchchoff:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

Didiferensialkan:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$mX''(t) + bX'(t) + kX(t) = 0$$

Analog dengan problem mekanika.

5.3. Transformasi Fourier

Secara Matematik transformasi Fourier dikembangkan dari deret Fourier. Secara detail dapat dilihat di Arfken.

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt$$

Inversnya:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{-i\alpha t} dt$$

Berbagai macam bentuk TF

Pasangan transformasi Fourier

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt \iff h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{i2\pi ft}df$$

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx \iff f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}dx$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx \iff f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{-ikx}dk$$

Di Mekanika Kuantum:

Paket gelombang, *f*(*x*), dengan gelombang dalam bilangan gelombang, *g*(*k*)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ikx} dk \quad \Leftrightarrow \quad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx$$

Lebih lengkap:

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-ik(x-\omega t)} dk$$

Jadi cukup banyak cara penulisan transformasi Fourier, pilih salah satu dan harus konsisten!

Sekarang kita lihat kenyataan bahwa pada umumnya hasil transformasi Fourier adalah fungsi kompleks.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

Kompleks

Maka:

$$H(f) = R(f) + \mathrm{i}\, I(f)$$

(real) (imaginer)

$$= |H(f)|\ e^{i\theta(f)}$$

fase

dengan

$$|H(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$

$$\theta(f) = \arctan\left[\frac{I(f)}{R(f)}\right]$$

Contoh:

$$h(t) = \beta\, e^{-\alpha t} \quad \text{pada } t > 0$$
$$= 0 \quad \text{pada } t < 0$$

Carilah harga real dan imaginer dari $H(f)$ dan fase $\theta(f)$

Jawab:

$$H(f) = \int_0^{\infty} \beta e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \beta e^{-(\alpha + i2\pi f)t}\, dt$$

$$= \beta . \frac{-1}{\alpha + i2\pi f} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha + i2\pi f}$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i\frac{\beta 2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Sehingga:

$$R(f) = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \text{ dan } I(f) = \frac{\beta 2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

serta

$$\theta(f) = \tan^{-1}\left(-\frac{2\pi f}{\alpha}\right) \text{ dan } |H(f)| = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

Syarat keberadaan integral Fourier:

1). $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ (finite) Syarat "cukup" tetapi tidak "harus"

$\rightarrow$ maka $H(f)$ exists

atau

2). Pada suatu fungsi

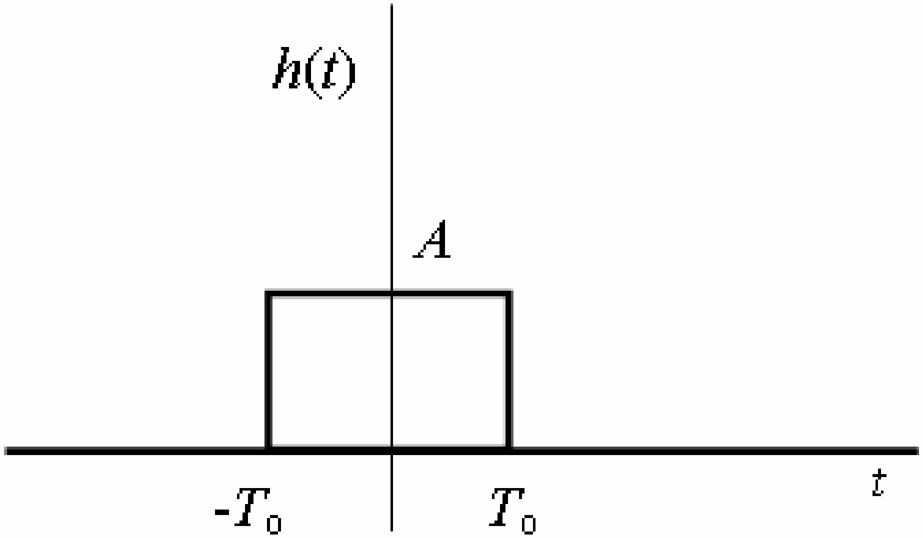
$h(t) = \beta(t) \sin(2\pi at + \alpha)$ dengan a dan α konstanta sebarang

bila $\left|\frac{h(t)}{t}\right|$ integrable

$\rightarrow$ maka $H(f)$ exists

Contoh-contoh

1. (untuk kondisi 1)
   Gelombang pulsa



$$h(t) = A \qquad |t| < T_0$$
$$= A/2 \quad t = \pm T_0$$
$$= 0 \qquad |t| > T_0$$

Kondisi 1: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-T_0}^{T_0} |A|dt = 2AT_0$ (terpenuhi)

Jadi $H(f)$ exists, sekarang kita evaluasi:

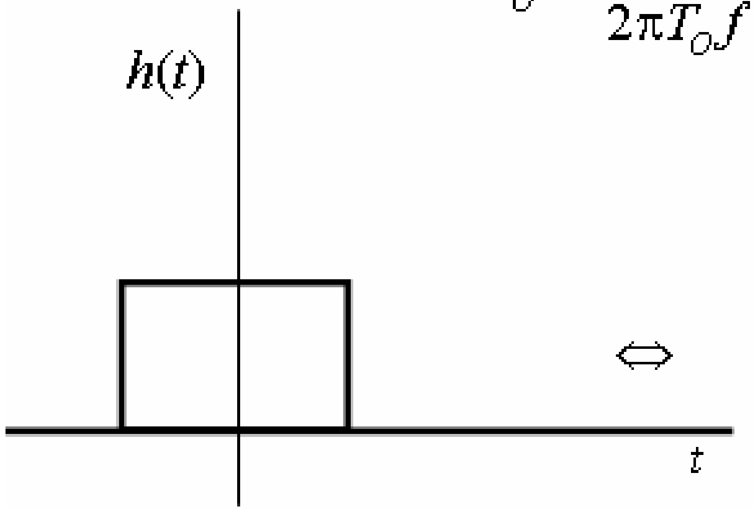
$$H(f) = \int_{-T_O}^{T_O} A e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= A\left[\int_{-T_O}^{T_O} \cos\ 2\pi ft\ dt - i \int_{-T_O}^{T_O} \sin\ 2\pi ft\ dt\right]$$

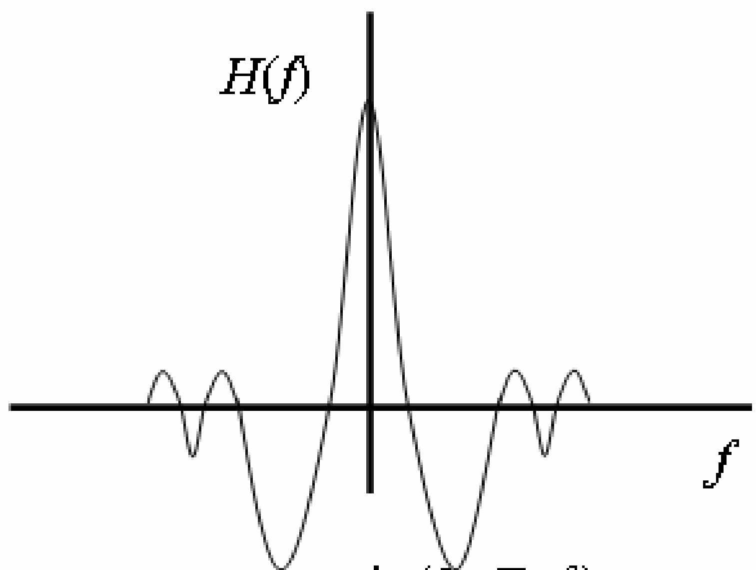
$\rightarrow$ 0 (ganjil)

$$= 2A.\frac{1}{2\pi f}\sin\ 2\pi ft\Big|_0^{T_O}$$

$$= 2AT_O\,\frac{\sin(2\pi T_O f)}{2\pi T_O f}$$



$\Leftrightarrow$



$h(t) = A \quad |t| < T_0 \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = 2AT_O\,\dfrac{\sin(2\pi T_O f)}{2\pi T_O f}$

2. (untuk kondisi 2)

$$h(t) = 2Af_O \frac{\sin(2\pi f_O t)}{2\pi f_O t}$$

dapat dibuktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$$ divergen (tak memenuhi kondisi 1)

tetapi kondisi 2 masih terpenuhi, sehingga tranformasi Fourier dapat dilakukan:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

$$= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_O t)}{t} \{\cos(2\pi f t) - i \sin(2\pi f t)\} dt$$

ganjil

$$= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_O t) \cos(2\pi f t)}{t} dt$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin 2\pi(f_o + f)t}{t} + \frac{\sin 2\pi(f_o - f)t}{t} \right\} dt$$

$$= A\left\{ (f_o + f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(f_o + f)t}{2\pi t} dt + (f_o - f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi(f_o - f)t}{2\pi t} dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} A\left\{ (f_o + f) \frac{1}{|f_o + f|} + (f_o - f) \frac{1}{|f_o - f|} \right\}$$

Pada $|f| < f_o$ disini $-f_o < f < f_o$ ➔ $H(f) = A$

$|f| = f_o$ ➔ $H(f) = A/2$

$|f| > f_o$ disini $f > -f_o$ atau $f < f_o$ ➔ $H(f) = 0$

Dapat disimpulkan

$$h(t) = 2Af_o \frac{\sin(2\pi f_o t)}{2\pi f_o t} \Leftrightarrow H(f) = A \quad |f| < f_o$$

3. Fungsi delta Dirac

$$h(t) = K\delta(t)$$

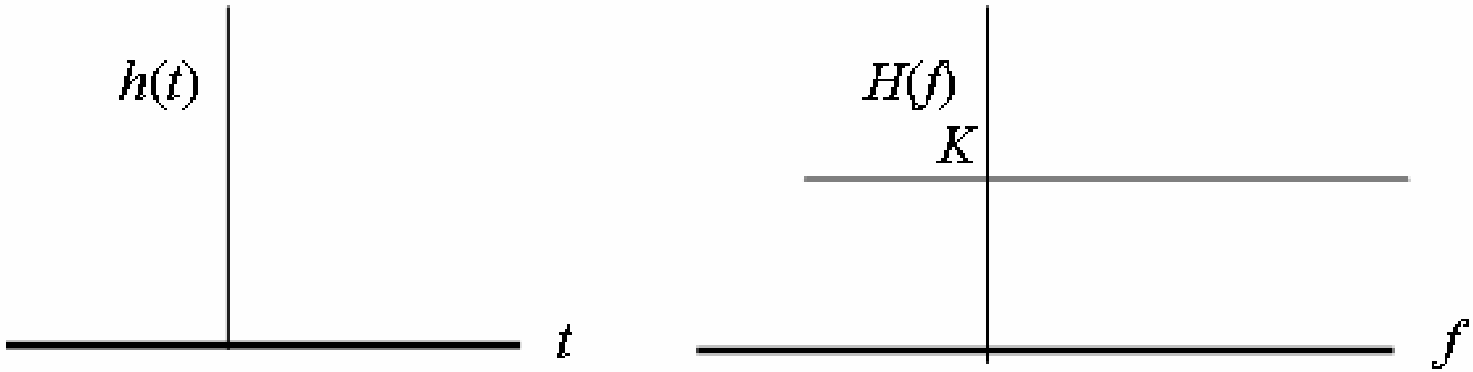
Hasil transformasi Fourier:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-2\pi ift}\,dt = K\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-2\pi ift}\,dt = Ke^{0} = K$$

Kebalikan:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi ift}\,df = \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-2\pi ift}\,df = K\delta(t)$$

Jadi: $h(t) = K\delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(f) = K$



4. Fungsi Periodik: (latihan)

$$h(t) = A\cos(2\pi f_o t)$$

Hasil transformasi Fourier:

$$H(f) =$$

$$=$$

$$= \frac{A}{2}\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}\delta(f + f_o)$$

Topik-topik tersisa

- Teorema Konvolusi
- Representasi Momentum
- Persamaan Integral